6. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 28.11.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 20 (mündlich) [Vorhersage von MA(1)-Zeitreihen]

Die Zeitreihe $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sei durch die Gleichungen

$$X_n = e_n + \beta e_{n-1}, \qquad \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2),$$

mit $|\beta| < 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} E(X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1})^2 = \sigma^2$$

für die beste lineare 1-Schritt-Vorhersage $\widehat{X}_{n+1}$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie hierzu den Innovations-Algorithmus.

Aufgabe 21 (3 Punkte) [Projektionen]

Sei $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ eine zentrierte, stationäre Zeitreihe mit Spektralfunktion F und zugehörigem Prozess $\{Z(\lambda)\}_{\lambda\in[-\pi,\pi]}$ mit orthogonalen Zuwächsen. Sei weiter

$$\mathcal{I}(g) = \int\limits_{(-\pi,\pi]} g(\lambda)\, dZ(\lambda), \quad g \in \mathcal{L}^2(F),$$

sowie $\mathcal{M}_n := \overline{\mathrm{sp}}\,\{X_j \,|\, j \le n\}$ und $\mathcal{N}_n := \overline{\mathrm{sp}}\,\{e^{ij\cdot} \,|\, j \le n\}$. Zeigen Sie:

$$P_{\mathcal{M}_n} X_{n+h} = \mathcal{I}\big(P_{\mathcal{N}_n} e^{i(n+h)\cdot}\big).$$

Aufgabe 22 (6 Punkte) [Vorhersage von ARMA(p,q)-Zeitreihen im Frequenzbereich]

Sei $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ eine kausale und invertierbare ARMA(p,q)-Zeitreihe gegeben durch die Gleichungen

$$a(B)X_j = b(B)e_j, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Sei weiter $f(\lambda) = |g(\lambda)|^2$ die Spektraldichte von $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ mit

$$g(\lambda) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ik\lambda}, \quad \lambda \in [-\pi,\pi],$$

und $c(z) = \sum_k c_k z^k = b(z)/a(z)$ für $|z| \le 1$.
Bestimmen Sie $\widehat{X}_{n+h}$ durch Vorhersage im Frequenzbereich.

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 23 (3 Punkte) [1-Schritt-Vorhersage]

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, stationäre, zentrierte Zeitreihe mit Autokovarianzfunktion

$$\gamma(h) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|h|}, \qquad h \in \mathbb{Z}.$$

Sei weiter $(0.5, 0.7, 0.6)$ eine Realisation von (X_1, X_2, X_3). Berechnen Sie die 1-Schritt-Vorhersage $\widehat{x}_4 = \widehat{x}_4(x_1, x_2, x_3)$ sowie den Vorhersagefehler v_4

a) über Inversion der Kovarianzmatrix Γ_3;

b) mittels des Durbin-Levinson-Algorithmus.