8. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 12.12.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 28 (mündlich) [Modellanpassung]

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine reelle, stationäre MA(1)-Zeitreihe, die fälschlicherweise durch eine AR(1)-Reihe $X_n - a_1 X_{n-1} = \varepsilon_n,\ n \in \mathbb{Z},$ modelliert werde. Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion von $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 29 (4 Punkte) [Reihendarstellung in $\mathcal{L}^2(P)$]

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ gegeben durch $X_n = e_n - e_{n-1},\ e_n \sim WN(0,\sigma^2)$ mit $0 < \sigma^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass e_n in $\overline{\text{sp}}\{X_j, -\infty < j \le n\}$ liegt, aber keine Reihendarstellung der Form

$$e_n = \sum_{j=0}^{\infty} c_j X_{n-j}$$

in $\mathcal{L}^2(P)$ besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie für den ersten Teil $\sum_{j=0}^{N}\left(1-\frac{j}{N}\right)X_{n-j}$. Führen Sie im zweiten Teil die Annahme, dass eine Darstellung der obigen Form existiert, durch Berechnung der Skalarprodukte $\langle e_n, e_{n-k}\rangle$ $(k = 0, 1, \dots)$ zum Widerspruch.

Aufgabe 30 (2+2 Punkte) [Yule-Walker-Schätzer, Konfidenzintervalle]

Aus den Beobachtungen $x_1, \dots, x_{100}$ der Anzahl von Sonnenflecken in den Jahren 1770-1869 ergeben sich folgende Schätzungen für die Werte der Autokovarianzfunktion:

$$\hat\gamma(0) = 1382,2; \quad \hat\gamma(1) = 1114,4; \quad \hat\gamma(2) = 591,72.$$

a) Geben Sie die Yule-Walker-Schätzungen für a_1, a_2 und σ^2 im kausalen AR(2)-Modell

$$Y_n - a_1 Y_{n-1} - a_2 Y_{n-2} = e_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \sim WN(0,\sigma^2),$$

für die Mittelwert-korrigierte Zeitreihe $Y_n = X_n - 46,93\,,\ n \in \mathbb{Z},$ an.

b) Bestimmen Sie asymptotische Konfidenzintervalle zum Niveau $1-\alpha = 0,95$ für die Parameter a_1 und a_2.

Aufgabe 31 (4 Punkte) [ML-Schätzer]

Gegeben seien zwei Realisationen x_1 und x_2 einer kausalen AR(1)-Zeitreihe

$$X_n - a_1 X_{n-1} = e_n, \qquad \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ iid}, \quad e_0 \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$

mit $|x_1| \neq |x_2|$. Finden Sie die Maximum-Likelihood-Schätzer für a_1 und σ^2.