9. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 19.12.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, in Raum 133 des MI

Aufgabe 32 (mündlich) [Overfitting]

Sei $a(B)X_n = e_n$ mit $a(z) = 1 - a_1 z - \ldots - a_p z$ eine kausale AR(p)-Zeitreihe, für die $\{e_n\} \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$ und $E(e_0^4) < \infty$ gelte. Die Yule-Walker-Schätzer der Ordnung $\tilde{p} \geq p$ sind definiert durch

$$\hat{a}_{\tilde{p}} = \begin{cases} \hat{\Gamma}_{\tilde{p}}^{-1}\,\hat{\gamma}_{\tilde{p}}\,, & \hat{\gamma}(0) > 0, \\ \underline{0}\,, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \hat{\Gamma}_{\tilde{p}} = \Big(\!\Big(\hat{\gamma}(k-j)\Big)\!\Big)_{j,k=1,\ldots,\tilde{p}}, \qquad \hat{\gamma}_{\tilde{p}} = (\hat{\gamma}(1), \ldots, \hat{\gamma}(\tilde{p}))^\top.$$

Sie sind ebenso wie die aus der Vorlesung bekannten Yule-Walker-Schätzer der Ordnung p konsistent und asymptotisch normalverteilt, d.h., es gilt für $n \to \infty$:

$$\hat{a}_{\tilde{p}} \xrightarrow{P} a_{\tilde{p}}, \quad \text{wobei} \quad a_{\tilde{p}} = (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^{\tilde{p}}$$

und

$$\sqrt{n}\,(\hat{a}_{\tilde{p}} - a_{\tilde{p}}) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\big(\underline{0}\,, \sigma^2\,\Gamma_{\tilde{p}}^{-1}\big), \qquad \Gamma_{\tilde{p}} = \Big(\!\Big(\gamma(k-j)\Big)\!\Big)_{j,k=1,\ldots,\tilde{p}}$$

(siehe Kreiß-Neuhaus (2006), Satz 11.2 und Satz 11.4).
Zeigen Sie für $a(z) = 1 - a_1 z$, dass das Überschätzen der tatsächlichen Ordnung 1 zu weniger präzisen Schätzern führt, indem Sie die asymptotische Varianz der Yule-Walker-Schätzer der Ordnungen 1 und 2 vergleichen.

Aufgabe 33 (4 Punkte) [KQ-Schätzer und ML-Schätzer]

Beweisen Sie Bemerkung 9.4 der Vorlesung.

Aufgabe 34 (4 Punkte) [ARIMA(p, d, q)-Zeitreihen]

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine ARIMA(p, d, q)-Zeitreihe, d.h., die X_n erfüllen die Differenzengleichungen

$$a(B)(1-B)^d X_n = b(B)e_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2).$$

Seien weiter $A_0, \ldots, A_{d-1}$ beliebige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Zeitreihe $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, gegeben durch

$$Y_n = X_n + A_0 + A_1 n + \ldots + A_{d-1} n^{d-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

die Differenzengleichungen ebenfalls erfüllt.

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 35 (4 Punkte) [Partielle Autokorrelationsfunktion]

Die *partielle Autokorrelationsfunktion* $\alpha(\cdot)$ einer stationären Zeitreihe $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ist durch

$$\alpha(k) = \begin{cases} \varrho(1)\,, & k = 1, \\ \operatorname{Korr}\big(X_{k+1} - P_{\overline{sp}\{1,X_2,\ldots,X_k\}}X_{k+1}, X_1 - P_{\overline{sp}\{1,X_2,\ldots,X_k\}}X_1\big)\,, & k \geq 2, \end{cases}$$

gegeben. Falls $\gamma(h) \to 0$ für $h \to \infty$, ist $\alpha(k) = c_k$, wobei c_k die letzte Komponente der Lösung c der Gleichung $\Gamma_k\, c = \gamma_k$ ist.
Zu Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$, die nicht alle gleich seien, schätzen wir die partielle Autokorrelationsfunktion durch $\hat{\alpha}(k) = \hat{c}_k$, wobei $\hat{c}$ die geschätzte Gleichung $\hat{\Gamma}_k\, \hat{c} = \hat{\gamma}_k$ erfüllt.

a) Zeigen Sie, dass die partielle Autokorrelationsfunktion eines $\mathrm{AR}(p)$-Prozesses für $k > p$ verschwindet.

b) Ist die Modellwahl in Aufgabe 30 verträglich mit a), wenn zusätzlich $\hat{\gamma}(3) = 96,215$ ist?