1. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: Freitag, 19.10.2012, 07:45 Uhr, vor dem Hörsaal C

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen aus $\mathcal{A}$. Die mengentheoretischen *Limes superior* und *Limes inferior* sind definiert durch

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ für } \infty \text{ viele } A_n\}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ für schließlich alle } A_n\}.$$

Aufgabe 1.1 (mündlich) [Limes superior/inferior]
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$. Weisen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A} \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

nach und geben Sie im Falle $\Omega = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}^1$ diese Limiten an für

$$A_n = \begin{cases} (1/n, 2/3 - 1/n)\,, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ (1/3 - 1/n, 1 + 1/n), & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}.$$

Aufgabe 1.2 (2+2 Punkte) [Borel-Cantelli-Lemma]
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie:

a) Aus $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$ folgt $P\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 1$.

b) Aus $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ folgt $P\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 0$.

Hinweis: Zeigen Sie für b) zunächst für beliebige Mengen $C_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ die Ungleichung

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n).$$

Aufgabe 1.3 (2+2 Punkte) [σ-Algebren]
Gegeben sei der Ereignisraum Ω und eine Familie $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ von σ-Algebren auf Ω, wobei I eine beliebige Indexmenge ist. Zeigen Sie:

a) $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ ist eine σ-Algebra.

b) Die Familie $\{A \subset \Omega \mid A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra.

Aufgabe 1.4 (1+1+1+1 Punkte) [Urnenmodelle]
Ein fairer Würfel werde n-mal geworfen. Bestimmen Sie unter vollständiger Angabe der Wahrscheinlichkeitsräume und Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten von

a) A_k: „Der k-te Wurf ergibt eine Drei".

b) B_k: „Der k-te Wurf ergibt die erste Drei".

c) C_k: „Der k-te und der $(k+1)$-te Wurf ergeben die ersten beiden Dreien".

Drücken Sie weiterhin die Ereignisse B_k und C_k mit Hilfe der Ereignisse A_k bzw. A_k^c aus.