

10. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: Donnerstag, 10.01.2013, bzw. Freitag, 11.01.2013, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

Aufgabe 10.1 (mündlich) [F-Verteilung]

Beweisen Sie Satz 9.3 der Vorlesung.

Aufgabe 10.2 (4+2 Punkte) [Approximation von t - und F -Verteilungen]

Sei $\{N_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ eine unabhängige Folge von $N(0,1)$ -verteilten Zufallsvariablen und seien die Zufallsvariablen T_n und $F_{m,n}$ gegeben durch

$$T_n = \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i^2}} \quad \text{und} \quad F_{m,n} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m N_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i^2} \quad \text{für} \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Weiter sei Z eine $N(0,1)$ -verteilte Zufallsvariable und X_m^2 eine χ_m^2 -verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie:

- a) $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ für $n \rightarrow \infty$;
- b) $P(F_{m,n} \leq x) \rightarrow P(X_m^2 \leq mx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ und $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 10.3 (2+2+2 Punkte) [Cramér-Rao-Ungleichung]

Seien die Voraussetzungen von Satz 10.1 erfüllt. Mit den Bezeichnungen aus Satz 10.1 gelte weiter:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_{\vartheta}(x) = a(\vartheta) + b(\vartheta)d(x) \quad \text{für alle} \quad \vartheta \in \Theta, \quad x \in \{x : f_{\vartheta}(x) > 0\}, \quad (1)$$

wobei

$$a, b : \Theta \rightarrow \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

- a) Für $d = d(x)$ aus (1) gilt in der Cramér-Rao-Ungleichung die Gleichheit.
- b) Im diskreten Fall ist Gleichung (1) notwendig für die Gleichheit in der Cramér-Rao-Ungleichung.
- c) Seien nun $X_1, \dots, X_n$ unabhängig, identisch $B(1, p)$ -verteilt. Geben Sie mit Hilfe der obigen Ergebnisse einen effizienten Schätzer für p an.