11. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: Donnerstag, 17.01.2013, bzw. Freitag, 18.01.2013, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

Aufgabe 11.1 (mündlich) [Maximum-Likelihood-Schätzer]
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.

Aufgabe 11.2 (3 Punkte) [Minimum-Varianz-Schätzer]
$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig, identisch verteilt mit $E(X_1) = a$ und $0 < Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n$ erfüllen, damit $d(X_1, \ldots, X_n) := \sum_{i=1}^n c_i X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für a ist, d.h. $E\, d(X_1, \ldots, X_n) = a$? Wann ist in diesem Fall die Varianz von d minimal?

Aufgabe 11.3 (4 Punkte) [Maximum-Likelihood-Schätzer]
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch π_λ-verteilte Zufallsvariablen, wobei $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ und zeigen Sie, dass er erwartungstreu und effizient ist.

Aufgabe 11.4 (3+2 Punkte) [Testen von Hypothesen]
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert a und Varianz $0 < \sigma^2 < \infty$, für die also der zentrale Grenzwertsatz gelte. Sei weiter $a_0 \in \mathbb{R}$ bekannt.

a) Bestimmen Sie asymptotische Tests zum Niveau α für die Hypothesen

   (i) $H: a \le a_0, \quad K: a > a_0$;
   (ii) $H: a = a_0, \quad K: a \ne a_0$.

b) Bei einer Versuchsreihe sind folgende Messwerte aufgetreten:

12.43	12.01	6.30	8.91	12.34	10.75	8.56	15.95
10.26	9.07	13.20	9.94	11.36	12.55	8.05	10.99

   Führen Sie die in a) entwickelten Tests für $\alpha = 0.10$ und $a_0 = 10$ durch.

Hinweis:

a) $\Phi^{-1}(0.95) = 1.645$ und $\Phi^{-1}(0.90) = 1.282$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichne.

b) Verwenden Sie $s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_n)^2$ als Schätzer für die unbekannte Varianz σ^2.