12. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: Donnerstag, 24.01.2013, bzw. Freitag, 25.01.2013, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

Aufgabe 12.1 (mündlich) [Gütefunktion]
Zeigen Sie anhand der Gütefunktionen, dass es sich bei dem ein- und zweiseitigen Gauß-Test (vgl. Beispiele 11.3 und 11.5 der Vorlesung) um unverfälschte Tests handelt.

Aufgabe 12.2 (6+2 Punkte) [Neyman-Pearson-Lemma, UMP-Test]
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Konstruieren Sie analog zu den Beweisschritten in Beispiel 11.4

a) einen besten Test φ^* zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für die Hypothesen
$$H: \ \lambda = \lambda_0, \quad K: \ \lambda = \lambda_1.$$

b) einen UMP-Test ψ^* zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für die Hypothesen
$$H: \ \lambda \leq \lambda_0, \quad K: \ \lambda > \lambda_0.$$

Aufgabe 12.3 (6 Bonuspunkte) [Gauß-Tests]
Die unteren drei Datenreihen seien jeweils Realisationen von unabhängigen, identisch $N(a, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen, $(a, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Testen Sie für jede Datenreihe jeweils die Hypothesen

a) $H: \ a \leq 2, \quad K: \ a > 2$ bzw.

b) $H: \ a = 2, \quad K: \ a \neq 2$

zum Niveau $\alpha = 0.05$, und zwar sowohl bei bekannter Varianz $\sigma^2 = 2$ als auch bei unbekannter Varianz σ^2 (insgesamt 12 Tests).

Hinweis: Die benötigten Quantile entnehmen Sie bitte geeigneten Tabellen (z.B. in Georgii (2009)) unter Angabe der entsprechenden Quelle.

Reihe 1:	1.213	3.086	5.332	3.062	3.185	2.865	3.410	2.627	1.492	1.770
Reihe 2:	1.388	4.099	-0.043	5.071	0.840	2.633	3.879	4.332	4.553	2.537
Reihe 3:	2.768	2.382	2.805	1.317	-0.302	2.617	-1.127	4.043	4.184	2.365

Aufgabe 12.4 (4 Bonuspunkte) [χ^2-Anpassungstest]
Sie werfen gleichzeitig 5 identische Münzen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit p „Kopf“ anzeigen, und zählen, wie oft „Kopf“ geworfen wurde. Bei 200 Durchführungen dieses Experiments erhalten Sie folgende Ergebnisse:

# „Kopf“	0	1	2	3	4	5
Häufigkeit	2	45	80	47	20	6

Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0.01$ die Hypothese, dass alle Münzen „fair“ sind, d.h., mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.5$ „Kopf“ liefern.

Hinweis: Es gilt

$$\chi^2_{4;0.99} = 13.27670, \quad \chi^2_{5;0.99} = 15.08627, \quad \chi^2_{6;0.99} = 16.81189,$$
$$\chi^2_{4;0.995} = 14.86026, \quad \chi^2_{5;0.995} = 16.74960, \quad \chi^2_{6;0.995} = 18.54758.$$