

5. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: Donnerstag, 15.11.2012, bzw. Freitag, 16.11.2012, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

Aufgabe 5.1 (mündlich) [gemeinsame Dichte]

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien absolut-stetig verteilt mit gemeinsamer Dichte

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1+x_1x_2}{4}, & |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie die Dichten der Randverteilungen von X_1 und X_2 .
- b) Sind X_1 und X_2 unabhängig?

Aufgabe 5.2 (1+1+1 Punkte) [Unabhängigkeit]

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sowie drei Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

- a) Die Ereignisse A und B sind genau dann unabhängig, wenn A und B^c unabhängig sind.
- b) Aus der jeweiligen paarweisen Unabhängigkeit von A, B und C folgt im Allgemeinen nicht die Unabhängigkeit von A, B und C .
- c) Aus der Beziehung $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ folgt im Allgemeinen nicht die jeweils paarweise Unabhängigkeit von A, B und C .

Aufgabe 5.3 (2+2 Punkte) [Poisson-Verteilung]

Seien X und Y unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern $\lambda > 0$ und $\mu > 0$. Zeigen Sie:

- a) $Z := X + Y$ ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda + \mu$.
- b) $P(X = k | Z = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ für alle $k = 0, \dots, n$ und $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $p = \lambda / (\lambda + \mu)$.

Aufgabe 5.4 (1+1+2+1 Punkte) [Zufallsvariablen]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- a) Zeigen Sie, dass die konstante Abbildung $X_1 : \Omega \rightarrow \mathcal{X}, \omega \mapsto a$, mit $a \in \mathcal{X}$ fest, bezüglich $\mathcal{A}$ und jeder σ -Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{X}$ eine Zufallsvariable ist.
- b) Sei nun $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$.
 - i) Zeigen Sie, dass die Abbildung $X_2 : \Omega \rightarrow \mathcal{X}, \omega \mapsto \omega + 1$, mit $\mathcal{X} = X_2(\Omega)$, keine Zufallsvariable bezüglich der σ -Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$ ist.
 - ii) Geben Sie eine nicht-konstante Abbildung $X_3 : \Omega \rightarrow \mathcal{X} = X_3(\Omega)$ an, die bezüglich der σ -Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$ eine Zufallsvariable ist.
 - iii) Sei P die (diskrete) Gleichverteilung auf $\mathcal{A}$, d.h., $P(A) = |A|/|\Omega|$ für $A \in \mathcal{A}$. Geben Sie für Ihre in ii) definierte Zufallsvariable die Verteilung P_{X_3} an.