5. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: Donnerstag, 15.11.2012, bzw. Freitag, 16.11.2012, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

Aufgabe 5.1 (mündlich) [gemeinsame Dichte]
Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien absolut-stetig verteilt mit gemeinsamer Dichte

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{1+x_1x_2}{4}, & |x_1|\le 1,\ |x_2|\le 1,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Dichten der Randverteilungen von X_1 und X_2.

b) Sind X_1 und X_2 unabhängig?

Aufgabe 5.2 (1+1+1 Punkte) [Unabhängigkeit]
Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},P)$ sowie drei Ereignisse $A,B,C\in\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

a) Die Ereignisse A und B sind genau dann unabhängig, wenn A und B^c unabhängig sind.

b) Aus der jeweiligen paarweisen Unabhängigkeit von A, B und C folgt im Allgemeinen nicht die Unabhängigkeit von A, B und C.

c) Aus der Beziehung $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$ folgt im Allgemeinen nicht die jeweils paarweise Unabhängigkeit von A, B und C.

Aufgabe 5.3 (2+2 Punkte) [Poisson-Verteilung]
Seien X und Y unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern $\lambda>0$ und $\mu>0$. Zeigen Sie:

a) $Z:=X+Y$ ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda+\mu$.

b) $P(X=k\,|\,Z=n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ für alle $k=0,\dots n$ und $n\in\mathbb{N}_0$, wobei $p=\lambda/(\lambda+\mu)$.

Aufgabe 5.4 (1+1+2+1 Punkte) [Zufallsvariablen]
Sei $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Zeigen Sie, dass die konstante Abbildung $X_1:\ \Omega\to\mathcal{X},\ \omega\mapsto a,$ mit $a\in\mathcal{X}$ fest, bezüglich $\mathcal{A}$ und jeder σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{X}$ eine Zufallsvariable ist.

b) Sei nun $\Omega=\{1,2,3,4\}$ und $\mathcal{A}=\{\emptyset,\{1\},\{2,3,4\},\Omega\}$.

   i) Zeigen Sie, dass die Abbildung $X_2:\ \Omega\to\mathcal{X},\ \omega\mapsto\omega+1,$ mit $\mathcal{X}=X_2(\Omega),$ keine Zufallsvariable bezüglich der σ-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}=\mathcal{P}(\mathcal{X})$ ist.

   ii) Geben Sie eine nicht-konstante Abbildung $X_3:\ \Omega\to\mathcal{X}=X_3(\Omega)$ an, die bezüglich der σ-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}=\mathcal{P}(\mathcal{X})$ eine Zufallsvariable ist.

   iii) Sei P die (diskrete) Gleichverteilung auf $\mathcal{A}$, d.h., $P(A)=|A|/|\Omega|$ für $A\in\mathcal{A}$. Geben Sie für Ihre in ii) definierte Zufallsvariable die Verteilung P_{X_3} an.