

6. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: Donnerstag, 22.11.2012, bzw. Freitag, 23.11.2012, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

Aufgabe 6.1 (mündlich) [gemeinsame Dichte]

Betrachten Sie die Zufallsvariablen aus Aufgabe 5.1. Sind X_1^2 und X_2^2 unabhängig? Warum ist das kein Widerspruch zu Satz 4.3?

Aufgabe 6.2 (1+1+1+1+2 Punkte) [gemeinsame Verteilung]

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte (i.i.d.) Zufallsvariablen mit einer stückweise stetigen Dichte f . Weiter sei

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{und} \quad m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}.$$

- a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von M_n und von m_n .
- b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion G von M_n und m_n .
- c) Nehmen Sie im Folgenden an, dass M_n und m_n gemeinsam absolut-stetig verteilt sind. Wie lautet die gemeinsame Dichte?
- d) Bestimmen Sie die Randdichten g_1 und g_2 von M_n und m_n .
- e) Bestimmen Sie die Dichte h von $R_n := M_n - m_n$.

Aufgabe 6.3 (3 Punkte) [χ^2 -Verteilung]

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig, identisch $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen und sei $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Zeigen Sie, dass Y_n absolut-stetig verteilt ist mit Dichte

$$f_n(y) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2} I_{(0,\infty)}(y).$$

Hinweis: 1. Die Gamma-Funktion ist definiert durch $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t} dt$.

2. Für $\alpha, \beta > 0$ gilt: $\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$.

Aufgabe 6.4 (3 Punkte) [gemeinsame Verteilung]

Geben Sie zwei absolut-stetig verteilte Zufallsvariablen X und Y an, die nicht gemeinsam absolut-stetig verteilt sind.