## 6. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: Donnerstag, 22.11.2012, bzw. Freitag, 23.11.2012, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

**Aufgabe 6.1** (mündlich) [gemeinsame Dichte]
Betrachten Sie die Zufallsvariablen aus Aufgabe 5.1. Sind $X_1^2$ und $X_2^2$ unabhängig? Warum ist das kein Widerspruch zu Satz 4.3 ?

**Aufgabe 6.2** (1+1+1+1+2 Punkte) [gemeinsame Verteilung]
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte (i.i.d.) Zufallsvariablen mit einer stückweise stetigen Dichte $f$. Weiter sei

$$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\} \quad \text{und} \quad m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von $M_n$ und von $m_n$.

b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion $G$ von $M_n$ und $m_n$.

c) Nehmen Sie im Folgenden an, dass $M_n$ und $m_n$ gemeinsam absolut-stetig verteilt sind. Wie lautet die gemeinsame Dichte?

d) Bestimmen Sie die Randdichten $g_1$ und $g_2$ von $M_n$ und $m_n$.

e) Bestimmen Sie die Dichte $h$ von $R_n := M_n - m_n$.

**Aufgabe 6.3** (3 Punkte) [$\chi^2$-Verteilung]
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen und sei $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Zeigen Sie, dass $Y_n$ absolut-stetig verteilt ist mit Dichte

$$f_n(y) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\, y^{n/2-1}\, e^{-y/2}\, I_{(0,\infty)}(y).$$

**Hinweis:** 1. Die Gamma-Funktion ist definiert durch $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t}\, dt$.

2. Für $\alpha, \beta > 0$ gilt: $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$.

**Aufgabe 6.4** (3 Punkte) [gemeinsame Verteilung]
Geben Sie zwei absolut-stetig verteilte Zufallsvariablen $X$ und $Y$ an, die nicht gemeinsam absolut-stetig verteilt sind.