8. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: Donnerstag, 06.12.2012, bzw. Freitag, 07.12.2012, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

Aufgabe 8.1 (mündlich) [Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung]

Seien $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zufallsvariablen mit $E(X_i) = E(Y_i) = 0$ und $\text{Var}(X_i) = \text{Var}(Y_i) = \sigma^2 < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon > 0$ und $\delta > 1$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{|\sum_{i=1}^n X_i Y_i|}{n^\delta} \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Aufgabe 8.2 (1+3 Punkte) [momenterzeugende Funktion]

Sei X eine reelle Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Bestimmen Sie $E(X)$ und $\text{Var}(X)$ mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion, falls

- X Poisson-verteilt ist;
- X Gamma(α, β)-verteilt ist, das heißt, falls die Dichte von X durch

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} I_{(0, \infty)}(x)$$

mit $\alpha, \beta > 0$ gegeben ist.

Aufgabe 8.3 (1+1+2 Punkte) [mehrdimensionale Normalverteilung]

Der Zufallsvektor (X_1, X_2) sei $N(a, \Sigma)$ -verteilt mit

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \Sigma = BB^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

wobei B eine reguläre 2×2 -Matrix sei. Zeigen Sie mit Hilfe der gemeinsamen momenterzeugenden Funktion $M_{X_1, X_2}(t_1, t_2)$, dass gilt:

- $E(X_i) = a_i$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ für $i = 1, 2$;
- $\text{Cov}(X_1, X_2) = \sigma_{12}$;
- $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ ist äquivalent zur Unabhängigkeit von X_1 und X_2 .

Aufgabe 8.4 (3+1 Punkte) [Konvergenz nach Verteilung]

Seien $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und X reelle Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und F . Weiter gelte $X_n \xrightarrow{D} X$ für $n \rightarrow \infty$.

- Zeigen Sie, dass F_n auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen F konvergiert, falls F stetig ist.
- Ist in Teil a) die Stetigkeit von F i.A. auch notwendig?