8. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: Donnerstag, 06.12.2012, bzw. Freitag, 07.12.2012, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

Aufgabe 8.1 (mündlich) [Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung]
Seien $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zufallsvariablen mit $E(X_i) = E(Y_i) = 0$ und $Var(X_i) = Var(Y_i) = \sigma^2 < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon > 0$ und $\delta > 1$ ist

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|\sum_{i=1}^n X_i\, Y_i|}{n^\delta} \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Aufgabe 8.2 (1+3 Punkte) [momenterzeugende Funktion]
Sei X eine reelle Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Bestimmen Sie $E(X)$ und $Var(X)$ mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion, falls

a) X Poisson-verteilt ist;

b) X Gamma(α, β)-verteilt ist, das heißt, falls die Dichte von X durch

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta}\, I_{(0,\infty)}(x)$$

mit $\alpha, \beta > 0$ gegeben ist.

Aufgabe 8.3 (1+1+2 Punkte) [mehrdimensionale Normalverteilung]
Der Zufallsvektor (X_1, X_2) sei $N(a, \Sigma)$-verteilt mit

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \Sigma = BB^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

wobei B eine reguläre 2×2-Matrix sei. Zeigen Sie mit Hilfe der gemeinsamen momenterzeugenden Funktion $M_{X_1,X_2}(t_1, t_2)$, dass gilt:

a) $E(X_i) = a_i$ und $Var(X_i) = \sigma_i^2$ für $i = 1, 2$;

b) $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12}$;

c) $Cov(X_1, X_2) = 0$ ist äquivalent zur Unabhängigkeit von X_1 und X_2.

Aufgabe 8.4 (3+1 Punkte) [Konvergenz nach Verteilung]
Seien $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und X reelle Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und F. Weiter gelte $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ für $n \to \infty$.

a) Zeigen Sie, dass F_n auf $\mathbb{R}$ *gleichmäßig* gegen F konvergiert, falls F stetig ist.

b) Ist in Teil a) die Stetigkeit von F i.A. auch notwendig?