Prof. Dr. Josef G. Steinebach WS 2012/13

9. Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: **Dienstag, 18.12.2012, 07:45 Uhr vor Hörsaal C**

Aufgabe 9.1 (mündlich) [Korrelation normalverteilter Zufallsvariablen]
Geben Sie zwei unkorrelierte, normalverteilte Zufallsvariablen an, die nicht unabhängig sind. Warum ist dies kein Widerspruch zu Aufgabe 8.3 ?

Aufgabe 9.2 (2 Punkte) [Gesetz der großen Zahlen]
Sei $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, $R[1,e]$-verteilter Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Konvergiert

$$Z_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}$$

nach Wahrscheinlichkeit ? Wenn ja, wie sieht ggf. der stochastische Limes aus ?

Aufgabe 9.3 (2+6 Punkte) [Konvergenzbegriffe]
Beweisen Sie die Rechenregeln 1) und 2) aus dem Skript, Seite 64.

Aufgabe 9.4 (3 Punkte) [Gesetz der großen Zahlen]
Sei $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zufallsvariablen mit $EX_i = a \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, die dem Gesetz der großen Zahlen genüge (vgl. z.B. Bemerkung 6.3). Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 9.5 (2+2+1 Punkte) [zentraler Grenzwertsatz]
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A_1 in einem Einzelexperiment sei gleich $p \in (0,1)$. Man führe n unabhängige Versuche durch und bezeichne mit $H_n(A_1)$ die relative Häufigkeit von A_1 in dieser Versuchsreihe. Beantworten Sie folgende Fragen mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes:

a) Sei $p = 0.4$ und $n = 1\,500$. Wie groß ist $P(0.4 \le H_n(A_1) \le 0.44)$?

b) Sei $p = 0.375$. Wie groß muss n sein, damit $P(|H_n(A_1) - p| \le 0.01) \ge 0.995$ gilt ?

c) Sei $n = 14\,400$. Für welche Werte von p gilt $P(|H_n(A_1) - p| \le 0.01) \ge 0.99$?