Prof. Dr. Josef G. Steinebach WS 2013/14

1. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: Montag, den 21.10.2013, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

Bemerkung. Wegen der großen Teilnehmerzahl sind Doppelabgaben (zwei Studierende je Blatt) zulässig und erwünscht.

Aufgabe 1.1 (mündlich) [Limes superior]
Bestimmen Sie eine Folge von Einpunktmengen $A_n = \{\ell_n\}$ mit $\ell_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $\limsup_{n\to\infty} A_n = \mathbb{N}$.

Aufgabe 1.2 (2+2 Punkte) [σ-Algebra]
Sei $T : \Omega \to \Omega'$ eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie:

a) Ist $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra in Ω', dann ist $T^{-1}(\mathcal{A}') := \{T^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$ eine σ-Algebra in Ω.

b) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω, so ist im Allgemeinen $T(\mathcal{A}) := \{T(A) : A \in \mathcal{A}\}$ keine σ-Algebra in Ω'.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte) [Ring, Algebra]
Seien $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{E}$ ein Ring in Ω und $\mathcal{R}_0 := \mathcal{E} \cup \{E^c : E \in \mathcal{E}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}_0$ die kleinste Algebra in Ω ist, die $\mathcal{E}$ umfasst, d.h., $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(\mathcal{E})$.