10. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: **Mittwoch**, den 08.01.2014, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

Aufgabe 10.1 (mündlich) [Summe unabhängiger Zufallsvariablen]
Seien X und Y unabhängige, reelle Zufallsvariablen mit $P_X = \pi_\lambda$ und $P_Y = \pi_\mu$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

Aufgabe 10.2 (3 Bonuspunkte) [Unabhängigkeit]
Zeigen Sie, dass zu jeder Folge von Wahrscheinlichkeitsräumen $\{(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und eine Folge unabhängiger, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_i$-messbarer Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ existieren, so dass $P_i = P_{X_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 10.3 (5 Bonuspunkte) [Verteilungsfunktion, Verteilungskonvergenz]
Seien $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, F eindimensionale Verteilungsfunktionen, wobei die $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach Verteilung gegen F konvergieren, das heißt, für alle Stetigkeitspunkte x von F gelte $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$. Zeigen Sie, dass für zwei konvergente reelle Folgen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ und alle Stetigkeitstellen von $F(ax + b)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = F(ax + b).$$

Hinweis: Zeigen (und verwenden) Sie, dass eine Verteilungsfunktion nur abzählbar viele Sprungstellen haben kann.

Aufgabe 10.4 (4 Bonuspunkte) [P-fast-sichere Konvergenz]
Seien $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) Es gibt eine Zufallsvariable X, so dass $X_n \overset{P-f.s.}{\longrightarrow} X$ $(n \to \infty)$.

b) $\sup_{m>n} |X_m - X_n| \xrightarrow{P} 0$ $(n \to \infty)$.