11. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: Montag, den 13.01.2014, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

Aufgabe 11.1 (mündlich) [Lemma von Borel-Cantelli]

a) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge von Ereignissen mit $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$. Zeigen Sie, dass $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$ ist.

b) Konstruieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und eine Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ und $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = p,\ 0 < p < 1,$ d.h., auf die Voraussetzung der Unabhängigkeit im Lemma von Borel-Cantelli kann i.A. nicht verzichtet werden.

Aufgabe 11.2 (3 Punkte) [Gleichgradige Integrierbarkeit, Konvergenz im r-ten Mittel]
Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge reeller Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E|X_1|^r < \infty$ $(r \geq 1,$ fest). Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt dann:

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow a := EX_1 \quad P\text{–f.s.} \quad (n \to \infty).$$

Zeigen Sie: $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} a \quad (n \to \infty)$.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte) [Null-Eins-Gesetz von Kolmogorov]
Seien $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Beweisen Sie:
$\limsup_{n\to\infty} X_n$ und $\liminf_{n\to\infty} X_n$ sind *degeneriert*, d.h., diese Grenzvariablen sind P-f.s. konstant.

Aufgabe 11.4 (5 Punkte) [Starkes Gesetz der großen Zahlen für Erneuerungsprozesse]
Sei $\{X_n\}$ eine i.i.d. Folge reeller, integrierbarer Zufallsvariablen mit $EX_1 = a > 0$. Setzt man $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$, und $N_t := \sup\{n \geq 1 \,|\, S_1, \ldots, S_n \leq t\},\ t \geq 0,$ wobei $\sup\emptyset := 0$ sei, so gilt:

a) $P(N_t < \infty) = 1 \quad \forall\, t \geq 0.$

b) $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty \quad P$–f.s.

c) $\lim_{t\to\infty} N_t/t = 1/a \quad P$–f.s.