12. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: Montag, den 20.01.2014, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

Aufgabe 12.1 (mündlich) [Normalverteilung]
Zeigen Sie, dass zwischen der Verteilungsfunktion Φ einer Standardnormalverteilung und deren λ^1-Dichte φ die Ungleichung $1-\Phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$ $(x>0)$ besteht. Beweisen Sie weiter, dass beide Seiten dieser Ungleichung sogar *asymptotisch äquivalent* sind, d.h., dass $x\,(1-\Phi(x))\,/\varphi(x) \to 1$ für $x \to \infty$ gilt.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte) [Kolmogorov-Kriterium]
Sei $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \infty$. Zeigen Sie: Es existiert eine unabhängige Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ integrierbarer reeller Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathit{Var}(X_n) = \sigma_n^2$, welche *nicht* dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt.

Hinweis: Man setze $\alpha_n = \max(\sigma_n, n)$ und $\beta_n = \min(\sigma_n, n)$ und wähle X_n derart, dass

$$P(X_n = \alpha_n) = P(X_n = -\alpha_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_n}{n}\right)^2; \quad P(X_n = 0) = 1 - \left(\frac{\beta_n}{n}\right)^2.$$

Aufgabe 12.3 (3 Punkte) [Konvergenz nach Verteilung]
Seien zwei Folgen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *stochastisch äquivalent*, d.h., $X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0$ $(n \to \infty)$. Beweisen Sie: $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ $(n \to \infty)$ gilt genau dann, wenn $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ $(n \to \infty)$ gilt.

Aufgabe 12.4 (5 Punkte) [Verteilungsfunktion, Lévy-Metrik]
Für zwei Verteilungsfunktionen F und G sei

$$d(F,G) := \inf\{\varepsilon \geq 0 \,:\, G(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq F(x) \leq G(x+\varepsilon) + \varepsilon \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie:

a) d definiert eine Metrik auf der Menge der Verteilungsfunktionen.

b) F_n konvergiert genau dann nach Verteilung gegen F, wenn $\lim_{n\to\infty} d(F_n, F) = 0$ gilt.