13. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: Montag, den 27.01.2014, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

Aufgabe 13.1 (mündlich) [Charakteristische Funktion]
Es sei $\varphi_X(t)$ die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen X. Zeigen Sie, dass es eine Zufallsvariable Y gibt, für deren charakteristische Funktion $\varphi_Y(t) = |\varphi_X(t)|^2$ gilt.

Aufgabe 13.2 (4 Punkte) [Starkes Gesetz der großen Zahlen]
Für zwei Folgen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von jeweils unabhängigen, reellen, zentrierten Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gelte $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) < \infty$. Beweisen Sie: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} EY_n^2/n^2 < \infty$ gilt, dann genügt auch $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dem starken Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe 13.3 (4 Punkte) [Charakteristische Funktionen]
Die Cauchy-Verteilung $C(a)$ mit Skalenparameter $a > 0$ ist eine absolut-stetige Verteilung mit der λ^1-Dichte $f_a(x) := a/\left\{\pi\left(a^2 + x^2\right)\right\}$ $(x \in \mathbb{R})$. Beweisen Sie mittels charakteristischer Funktionen die Faltungsformel $C(a) * C(b) = C(a+b) \quad (a, b > 0)$.

Aufgabe 13.4 (4 Punkte) [Verteilungskonvergenz, charakteristische Funktion, Straffheit]
Sei $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller, $R[-n, n]$-verteilter Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Funktionen $\varphi_{Z_n}(t)$ von Z_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = I_{\{0\}}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

b) Gibt es eine reelle Zufallsvariable Z mit $Z_n \xrightarrow{D} Z$?

c) Ist $\{P_{Z_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ straff?

Hinweis: Dies ist eine alte Klausuraufgabe.