3. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe: Montag, den 04.11.2013, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

Aufgabe 3.1 (mündlich) [Fortsetzungssatz]
Sei μ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und μ^* das zugehörige äußere Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass für p.d. Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$, gilt: $\lim_{n\to\infty} \mu^*\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \mu^*\left(\sum_{k=1}^\infty A_k\right)$.

Aufgabe 3.2 (5 Punkte) [äußere Maße]
Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und sei die σ-Algebra $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A$ oder A^c abzählbar$\}$ gegeben. Das Maß μ sei auf $\mathcal{A}$ wie folgt definiert:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar}, \\ 1, & A^c \text{ abzählbar}, \end{cases} \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie:

a) Das zu μ gehörige äußere Maß μ^* ist gegeben durch

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar}, \\ 1, & A \text{ nicht abzählbar}, \end{cases} \qquad A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

b) Auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist μ^* kein Maß (nicht einmal ein Inhalt).

c) A ist genau dann μ^*-messbar, wenn $A \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte) [Eindeutigkeitssatz]
Sei $\mathcal{F} := \mathcal{R}(\mathcal{I})$, wobei $\mathcal{I} = \{(a,b] : a \le b;\, a,b \in \mathbb{R}\}$, und sei $D \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\mu(A) = |A \cap D|$ ein Prämaß auf $\mathcal{F}$ ist, das sich i.A. nicht eindeutig zu einem Maß auf $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{F})$ fortsetzen lässt.

Aufgabe 3.4 (3 Punkte) [Produkträume, Projektionen]
Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Messräumen. Zeigen Sie, dass für $\emptyset \neq J \subset I$ die Projektion

$$p_J^I : \prod_{i\in I} \Omega_i \to \prod_{j\in J} \Omega_j, \qquad \bigotimes_{i\in I} \omega_i \mapsto \bigotimes_{j\in J} \omega_j$$

messbar ist bzgl. der jeweiligen Produkt-σ-Algebren, d.h., p_J^I ist $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$ - $\bigotimes_{j\in J} \mathcal{A}_j$ -messbar.