

**4. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“**

Abgabe: Montag, den 11.11.2013, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

**Aufgabe 4.1** (mündlich) [Bildmaß]

Betrachten Sie den Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ . Zeigen Sie, dass das Bildmaß  $T(\lambda)$  unter einer messbaren Abbildung  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i.A. *nicht*  $\sigma$ -endlich sein muss.

**Aufgabe 4.2** (4 Punkte) [ $\sigma$ -endliches Maß]

Beweisen Sie Lemma 3.2 der Vorlesung.

**Aufgabe 4.3** (4 Punkte) [ $\mu$ -integrierbare Funktionen]

Seien  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum mit einem *endlichen* Maß  $\mu$  und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion. Beweisen Sie:

a) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) \leq \int |f| d\mu \leq \mu(\Omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\}).$$

b)  $f$  ist genau dann  $\mu$ -integrierbar, wenn die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\})$  konvergiert.

**Aufgabe 4.4** (4 Punkte) [algebraische Induktion]

Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum und sei  $\{\mu_n\}_{n=1,2,\dots}$  eine Familie von Maßen auf  $\mathcal{A}$ . Zeigen Sie, dass für das Maß  $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n$  und alle  $f \in E^*$  gilt:

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f d\mu_n.$$