4. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: Montag, den 11.11.2013, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

Aufgabe 4.1 (mündlich) [Bildmaß]
Betrachten Sie den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Zeigen Sie, dass das Bildmaß $T(\lambda)$ unter einer messbaren Abbildung $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i.A. *nicht* σ-endlich sein muss.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte) [σ-endliches Maß]
Beweisen Sie Lemma 3.2 der Vorlesung.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte) [μ-integrierbare Funktionen]
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem *endlichen* Maß μ und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Beweisen Sie:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) \leq \int |f| d\mu \leq \mu(\Omega) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\})$.

b) f ist genau dann μ-integrierbar, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\})$ konvergiert.

Aufgabe 4.4 (4 Punkte) [algebraische Induktion]
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und sei $\{\mu_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Familie von Maßen auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass für das Maß $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n$ und alle $f \in E^*$ gilt:

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f \, d\mu_n.$$