5. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: Montag, den 18.11.2013, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

Aufgabe 5.1 (mündlich) [μ-f.ü. definierte Eigenschaften]
Seien f und g zwei auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ definierte numerische Funktionen mit

$$f = g \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Zeigen Sie, dass aus der Messbarkeit von f im Allgemeinen nicht die Messbarkeit von g folgt. Was gilt, wenn μ vollständig ist?

Aufgabe 5.2 (4 Punkte) [integrierbare numerische Funktionen]
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge (μ-) integrierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie:

a) Ist μ endlich, so ist f integrierbar.

b) Ist μ σ-endlich, so ist f im Allgemeinen nicht integrierbar, und falls f integrierbar ist, muss *nicht* gelten

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Aufgabe 5.3 (4 Punkte) [σ-endliche Maße mit Dichten]
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\nu = f\,\mu$ ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Dichte f bezüglich μ. Zeigen Sie:

a) f ist μ-f.ü. eindeutig bestimmt und μ-f.ü. reellwertig.

b) Falls $f(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt, so ist auch μ σ-endlich.

Hinweis: Benutzen Sie Bemerkung 5.2 der Vorlesung.

Aufgabe 5.4 (4 Punkte) [Radon-Nikodym-Dichte]
Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ, ν, λ jeweils σ-endliche Maße auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

a) Gilt $\nu \ll \mu$ und $\lambda \ll \mu$, so folgt $\nu + \lambda \ll \mu$ und

$$\frac{d(\nu+\lambda)}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\mu} + \frac{d\lambda}{d\mu} \qquad \mu\text{-f.ü.}$$

b) Gilt $\nu \ll \lambda$ und $\lambda \ll \mu$, so folgt $\nu \ll \mu$ und

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\mu} \qquad \mu\text{-f.ü.}$$