Prof. Dr. Josef G. Steinebach WS 2013/14

6. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: Montag, den 25.11.2013, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

Aufgabe 6.1 (mündlich) [Transformationssatz]
Sei ν das Dichtemaß einer $N(0,1)$-Verteilung bezüglich λ^1, also $\nu = f\,\lambda^1$ mit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \exp(-x^2/2).$$

Bestimmen Sie die Dichte von $T(\nu)$ unter der Transformation $T:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^2$.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte) [$\mathcal{L}^p$-Räume]
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem endlichen Maß μ und seien $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{L}^{p_2}(\mu) \subset \mathcal{L}^{p_1}(\mu)$;

b) Für alle $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $f:\ \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt: $\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte) [Satz von Lebesgue]
Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f = F'$ beschränkt. Zeigen Sie, dass f über $[a,b]$ Lebesgue-integrierbar ist und

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda^1 = F(b) - F(a)$$

erfüllt.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte) [Konvergenz im Mittel]
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem endlichen Maß μ. Ferner seien $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f$ reellwertige messbare Funktionen mit

a) $|f_n| \leq g \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots,$ wobei $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$;

b) Zu jeder Teilfolge $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine Teilfolge $\{f_{n'_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n'_k} = f \quad \mu -$ f.ü.

Zeigen Sie, dass gilt: $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$.