7. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: Montag, den 02.12.2013, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

Aufgabe 7.1 (mündlich) [Integrale auf Produkträumen]
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ das Produkt der σ-endlichen Maßräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ und sei f eine $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktion. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass aus der Existenz der Integrale

$$\int \left(\int f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1) \quad \text{und} \quad \int \left(\int f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2)$$

nicht die μ-Integrierbarkeit von f über Ω folgt.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte) [Produktraum]
Seien $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ und Δ die Diagonale von $\Omega \times \Omega$, also $\Delta = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega \,:\, \omega_1 = \omega_2\}$. Zeigen Sie, dass die Diagonale *nicht* messbar ist, d.h., dass gilt: $\Delta \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte) [Integrale auf Produkträumen]
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume, f_1 μ_1-integrierbar mit $\int f_1\, d\mu_1 = a_1$ und f_2 μ_2-integrierbar mit $\int f_2\, d\mu_2 = a_2$. Sei weiter $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$, $(\omega_1, \omega_2) \mapsto f_1(\omega_1) \cdot f_2(\omega_2)$. Zeigen Sie:

a) f ist $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-messbar;

b) f ist $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbar mit $\int f\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = a_1 \cdot a_2$.

Aufgabe 7.4 (4 Punkte) [Produktmaß]
Sei μ ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und sei $f \geq 0$ und $\mathcal{A}$-messbar. Zeigen Sie:

$$\int f\, d\mu = (\mu \otimes \lambda)(\{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq f(\omega)\}).$$