Prof. Dr. Josef G. Steinebach WS 2013/14

8. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: Montag, den 09.12.2013, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

Aufgabe 8.1 (mündlich) [Limes superior von Ereignissen]
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, A_2, \ldots; \ B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

a) $(\limsup_{n\to\infty} A_n) \cap (\limsup_{n\to\infty} B_n) \supset \limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n)$

b) $(\limsup_{n\to\infty} A_n) \cup (\limsup_{n\to\infty} B_n) = \limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n)$.

Aufgabe 8.2 (3 Punkte) [Zufallsvariable]
Zwei reelle Zufallsvariablen X und Y auf einem gemeinsamen W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißen *stochastisch äquivalent*, falls $P(X = Y) = 1$ gilt. Zeigen Sie, dass zwei stochastisch äquivalente Zufallsvariablen dieselbe Verteilung besitzen.

Aufgabe 8.3 (4 Punkte) [Laplace-Modell]
Vor Beginn einer Klausur gibt jeder der n Studenten pflichtbewusst sein eigenes Handy ab. (Jeder Student besitze dabei genau ein Handy.) Bei Ausbruch eines Feuers, verlassen diese n Klausurteilnehmer fluchtartig das Gebaude und in der allgemeinen Panik schnappt sich jeder irgendein Handy. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass niemand sein eigenes Handy erwischt.

Hinweis: Beachten Sie die Bemerkung 1.11 (Formel von Poincaré-Sylvester).

Aufgabe 8.4 (5 Punkte) [Quantilfunktion]
Sei F die Verteilungsfunktion einer reellen Zufallsvariablen. Betrachten Sie die Quantilfunktion (bzw. verallgemeinerte Inverse)

$$F^{-1}(p) := \inf\Big\{x \in \mathbb{R} \,|\, F(x) \geq p\Big\}, \qquad p \in (0,1),$$

und zeigen Sie:

a) Die Quantilfunktion ist monoton wachsend.

b) Für $p \in (0,1)$ gilt: $F\left(F^{-1}(p)\right) \geq p$.

c) Für $p \in (0,1)$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt: $F(x) \geq p$ genau dann, wenn $x \geq F^{-1}(p)$.

d) Für $p \in (0,1)$ gilt: $F\left(F^{-1}(p)\right) = p$ genau dann, wenn $p \in \{F(x) |\, x \in \mathbb{R}\}$.

e) Die Quantilfunktion ist linksstetig.