9. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: Montag, den 16.12.2013, um 07:50 Uhr, vor dem Hörsaal E (Hörsaalgebäude)

Aufgabe 9.1 (mündlich) [Unabhängigkeit, Erwartungswert]
Seien X und Y reelle Zufallsvariablen und bezeichne $\mathcal{F}_+$ die Menge aller reellen, nichtnegativen, Borel-messbaren Funktionen. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) X und Y sind unabhängig.

b) Für alle $f, g \in \mathcal{F}_+$ gilt $E(f(X)\, g(Y)) = E(f(X))\, E(g(Y))$.

Aufgabe 9.2 (2+2 Punkte) [Normalverteilung, Faltung]

a) Sei Z ein k-dimensionaler Zufallsvektor mit Verteilung $N(a, \Sigma)$ $(a \in \mathbb{R}^k,\ \Sigma$ positiv-definit) und $T:\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k,\ z \mapsto Cz + b$, mit einer regulären $k \times k$-Matrix C und $b \in \mathbb{R}^k$.
Zeigen Sie, dass $T(Z) = CZ + b$ eine $N(Ca + b, C\Sigma C^T)$-Verteilung besitzt.

b) Seien X, Y unabhängige, reelle Zufallsvariablen mit Verteilungen $P_X = N(a, \sigma^2)$, $P_Y = N(b, \tau^2)$ $(a, b \in \mathbb{R};\ \sigma^2, \tau^2 > 0)$.
Zeigen Sie, dass $X + Y$ eine $N(a + b, \sigma^2 + \tau^2)$-Verteilung besitzt.
Hinweis: Benutzen Sie, dass die Randverteilungen einer mehrdimensionalen Normalverteilung eindimensionale Normalverteilungen sind.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte) [Momente]
Berechnen Sie alle Momente der folgenden Verteilungen:

a) Standardnormalverteilung $N(0, 1)$;

b) Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$ $(\lambda > 0)$;

c) Cauchy-Verteilung (λ^1-Dichte: $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},\ x \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 9.4 (4 Punkte) [Momenterzeugende Funktion]
Beweisen Sie Satz 15.3 der Vorlesung.