

10. Übung zur Numerischen Mathematik I

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (4 + 4 = 8 Punkte)

Es sei die folgende Wilkinson-Matrix (auch aus der Vorlesung und vom 9. Übungsblatt bekannt) gegeben

$$W_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Berechnen Sie handschriftlich den Wachstumsfaktor $\rho_5(W_5)$ durch Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche.
- (ii) Geben Sie eine allgemeine Formel für $\rho_n(W_n)$ an und beweisen Sie Ihre Behauptung.

Hinweis: Beachten Sie auch **Satz 7.5.3** aus der Vorlesung:

Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche erfüllt der Wachstumsfaktor $\rho_n(A)$ die Abschätzung $\rho_n(A) \leq 2^{n-1}$.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung handschriftlich die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 12 & 12 \\ 3 & 12 & 27 & 27 \\ 3 & 12 & 27 & 36 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben sei $f(x) := \sin(\frac{\pi}{2}x)$ auf dem Intervall $[-2, 2]$. Bestimmen Sie ein Polynom $p \in \mathbf{P}_4$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} p(-2) &= f(-2) & p(1) &= f(1) \\ p(-1) &= f(-1) & p(2) &= f(2) \\ p(0) &= f(0) \end{aligned}$$

Ist die gefundene Lösung eindeutig?

Plotten Sie mit matlab oder octave f und p in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Es seien folgende Stützstellen gegeben:

i	(x_i, y_i)
0	$(-2, -1)$
1	$(-1, 1)$
2	$(0, 0)$
3	$(1, 1)$
4	$(2, -1)$

Mit $p \in \mathbf{P}_4$ sei das zugehörige Interpolationspolynom bezeichnet. Berechnen Sie p durch die Methode nach Lagrange und überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

Abgabedatum: 28.06.2012, 10 Uhr in den Kasten im Mathematischen Insitut