

11. Übung zur Numerischen Mathematik I

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Es seien folgende Stützstellen gegeben (bereits aus Übung 10 bekannt):

i	(x_i, y_i)
0	$(-2, -1)$
1	$(-1, 1)$
2	$(0, 0)$
3	$(1, 1)$
4	$(2, -1)$

Mit $p_4 \in \mathbf{P}_4$ sei das zugehörige Interpolationspolynom bezeichnet. Berechnen Sie p_4 durch die Methode nach Newton und überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

In der nachfolgenden Tabelle finden Sie die Werte eines Polynoms vierten Grades p . Einer der Funktionswerte ist falsch. Korrigieren Sie ihn und geben Sie das gesuchte Polynom an.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p(x)$	8	23	33	37	31	28	18	8	2	5	23

Hinweis: Überlegen Sie, wie sich ein Fehler im Schema der dividierten Differenzen auswirkt.

Aufgabe 3: ($6 + 2 + 2 = 10$ Punkte)

Die Funktion $f \in \mathcal{C}^6([a, b])$ soll durch die Polynome $p \in \mathbf{P}_5$ approximiert werden. Die Stützstellen seien äquidistant gewählt. Welche Schranken für den maximalen Interpolationsfehler ergeben sich für die einzelnen Intervalle?

Welche Fehlerschranken ergeben sich daraus für die Funktionen

(i) $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $h = \frac{\pi}{10}$

(ii) $f(x) = e^{-3x}$, $x \in [0, 5]$, $h = 1$?

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, $x_0, \dots, x_n \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ seien paarweise verschieden und $p \in \mathbf{P}_n$ sei das Interpolationspolynom von f in den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$, d.h. $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

Zeigen Sie, dass zu jedem x_j , $j = 0, \dots, n$, ein $\tilde{x}_j \in [a, b]$ existiert mit

$$f'(x_j) - p'(x_j) = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x}_j)}{(n+1)!}.$$

Aufgabe 5: (Programmieraufgabe)(20 Punkte)

Erstellen Sie ein Programm zur Newton-Interpolation und rechnen Sie das Beispiel von Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \quad x \in [-1, 1].$$

Verwenden Sie zur Berechnung des Interpolations-Polynoms $p_n(x)$

- (i) äquidistante Stützstellen (z.B. mit *linspace*)
- (ii) die Stützstellen, die durch die Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome gegeben sind.

Hinweis: Die Tschebyscheff-Polynome lassen sich mit Hilfe der trigonometrischen Polynome auch darstellen als $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$. Daher liegen die Nullstellen von $T_n(x)$ bei $x = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n}\right)$, $j = 0, \dots, n-1$.

Schätzen Sie den Fehler $\|f - p_n\|_\infty$, indem Sie das Intervall hinreichend fein unterteilen und die Differenzen zwischen $f(x)$ und $p_n(x)$ betrachten.

Führen Sie Ihre Berechnung für $n = 1, 4, 10, 15, 25, 40$ durch. Geben Sie die berechneten Fehler in einer Tabelle an. Stellen Sie sowohl die Fehler als auch die berechneten Polynome graphisch dar.

Abgabedatum: 05.07.2012, 10 Uhr in den Kasten im Mathematischen Institut