

12. Übung zur Numerischen Mathematik I

Aufgabe 1: (Nichtlineare Gleichungen)

Sei die Funktion f gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax^b + c$$

mit den Parametern $a \in \mathbb{R}, a > 0, b \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$.

- (i) Stellen Sie die Newton-Iteration zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ auf
- (ii) Zeigen Sie: für $c = 0$ konvergiert das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}$.
- (iii) Lässt sich die Aussage aus (ii) auch auf den Fall $c \neq 0$ übertragen?

Hinweis: Es gibt noch weitere Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen, die auch Teil der Klausur sein können. Beispielsweise die Fixpunktiteration, das Sekantenverfahren oder auch das Newtonverfahren in mehr als einer Dimension.

Aufgabe 2: (Direkte Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssysteme)

Es sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ gegeben, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 29 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

- (i) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A mit Spalten-Pivot-Suche, also von der Form $LR = PA$
- (ii) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix A
- (iii) Lösen Sie das LGS mit Hilfe einer der beiden Zerlegungen (wählen Sie selbst!)

Aufgabe 3:(Iterative Verfahren)

Es sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ gegeben, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, ob das Gauß-Seidel-Verfahren und das Jacobi-Verfahren zur Lösung des LGS konvergieren. Führen Sie 3 Schritte, ausgehend vom Startwert $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, mit einem der beiden Verfahren aus. (Die Wahl ist dabei Ihnen überlassen).

Hinweis: Wir möchten an dieser Stelle noch auf das SOR-Verfahren und einige interessante und hilfreiche Konvergenzkriterien hinweisen.

Aufgabe 4:(Interpolation)

Interpolieren Sie die Funktion

$$f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)x^2$$

durch ein Polynom p_3 dritten Grades in den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$. Nutzen Sie dazu einmal die Methode nach Lagrange und einmal die Methode nach Newton. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.

Hinweis: Beachten Sie auch noch die Fehlerabschätzungen für die Polynominterpolation. Spline-Interpolation wird hingegen nicht in der ersten, ggf. aber in der Nachklausur abgefragt.

Aufgabe 5:(Ausgleichsprobleme)

Ein Experiment ergab folgende Daten

$$(x_0, y_0) = (-1, 1), (x_1, y_1) = (0, 2), (x_2, y_2) = (1, 3), (x_3, y_3) = (0, 4).$$

Sie vermuten einen polynomialen Zusammenhang $y = p(x) = ax^2 + bx + c$ zwischen x und y und einen gewissen Fehler in den Messungen. Bestimmen Sie die bestmögliche Approximation p im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

Hinweis: An dieser Stelle wollen wir auch auf das Thema Abschwächung des Lösungsbegriffs und auch auf das Thema Pseudoinverse bzw. Moore-Penrose-Inverse hinweisen.

Aufgabe 6:(QR-Zerlegung)

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Dazu stehen Ihnen mit Gram-Schmidt, modifiziertem Gram-Schmidt und der Householder-Transformation grundsätzlich 3 Methoden zur Verfügung!

Hinweis:Die Aufgaben 7 und 8 sind für die erste Klausur nicht relevant, womöglich aber für die Nachklausur.

Aufgabe 7:(Spline-Interpolation)

- (i) Interpolieren Sie die Funktion $f(x) = |x|$ in den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ durch

- (1) einen kubischen Spline s_1 mit den Randbedingungen

$$s_1''(x_0) = s_1''(x_2) = 0$$

- (2) einen kubischen Spline s_2 mit den Randbedingungen

$$s_2'(x_0) = f'(x_0) \quad , \quad s_2'(x_2) = f'(x_2)$$

- (3) ein Polynom p vom Grad 4 mit den Randbedingungen

$$p'(x_0) = f'(x_0) \quad , \quad p'(x_2) = f'(x_2)$$

- (ii) Berechnen Sie jeweils die Interpolationsfehler zu f im Intervall $[-1, 1]$ bezüglich der Maximumsnorm. ($\|f - s_i\|_\infty, i = 1, 2$ und $\|f - p\|_\infty$)

Aufgabe 8:(Numerische Integration)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(\cos(x)) - \exp(-1) .$$

- (i) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{[-\pi, \pi]} f(x) dx$$

mit der zusammengesetzten Trapezregel. Benutzen Sie dabei die Stützstellen $x_i \in \{-\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

- (ii) Schätzen Sie eine Schrittweite h für die zusammengesetzte Trapezregel (mit äquidistanten Stützstellen), für die Sie garantieren können, daß das Integral

$$\int_{[-\pi, \pi]} f(x) dx$$

bis auf einen Fehler $e < 10^{-6}$ approximiert wird.

Abgabe: Die Bearbeitung dieser Übung ist freiwillig. Die Übung wird nicht korrigiert und soll nicht abgegeben werden. Aufgaben von ähnlicher Art können, müssen aber nicht Bestandteil der Klausur sein! Diese Aufgabensammlung erhebt nicht den Anspruch ein vollständiger Leitfaden für Ihre Klausurvorbereitung zu sein!