Universität zu Köln Sommersemester 2012

Prof. Dr. A. Klawonn
Dipl.-Math. M. Lanser 19. April 2012

2.Übung zur Numerischen Mathematik I

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (2 + 2 + 6 = 10 Punkte)
Erstellen Sie (z.B. mit "matlab") ein Diagramm, in dem die Funktionen

$$f(x) := \tan(x) \qquad \text{und} \qquad g(x) := x$$

dargestellt sind.
Besitzt $\tan(x)$ auf dem Intervall $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ einen Fixpunkt?
Konstruieren Sie eine konvergente Fixpunktiteration für den Fall, dass ein Fixpunkt existiert.
(**Hinweis:** Für den ersten Aufgabenteil genügt es, wenn Sie das ausgedruckte Diagramm abgeben.)

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Die positive Nullstelle $\sqrt{a}$ der Funktion $f(x) = x^2 - a$ mit $a > 0$ soll mit dem Newton-Verfahren berechnet werden. Geben Sie (mit Beweis) an, für welche Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diese Nullstelle konvergiert.

Aufgabe 3: (2 + 4 = 6 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \end{bmatrix}$$

Betrachten Sie die Normen $||A||_1 := \sup_{j=1...m}\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\}$ (Spaltensummennorm) und $||A||_\infty := \sup_{i=1...n}\{\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\}$ (Zeilensummennorm), wobei $A = (a_{ij})$ eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten ist. Zeigen Sie, dass g bezüglich einer der beiden Normen kontrahierend ist und bezüglich der anderen nicht.

Aufgabe 4: (3 + 5 = 8)
Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \frac{1}{4}x^3.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das Fixpunktproblem $f(x) = x$ eine eindeutige Lösung im Intervall $[-1, 1]$ hat.
Berechnen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes eine Anzahl k von Iterationsschritten, so dass der Fehler $|x^{(k)} - x^*|$ garantiert kleiner als 10^{-7} ist. Betrachten Sie dazu den Startwert $x^{(0)} = 1$.

Programmieraufgabe 1: (10)
Programmieren Sie eine Fixpunktiteration zu Aufgabe 4.
Genauer: Programmieren Sie eine Funktion $fixpunkt(x0, epsilon)$, welches, ausgehend von einem Startwert $x0$, den Fixpunkt der Funktion $f(x)$ aus Aufgabe 4 mittels einer Fixpunktiteration approximiert. Das Programm soll terminieren, wenn für den Fehler ϵ gilt:

$$\epsilon := |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < epsilon.$$

Testen Sie Ihr Programm auf jeden Fall mit dem Startwert $x0 = 1$ und der Genauigkeit $epsilon = 10^{-7}$.
Versuchen Sie, anhand Ihrer Ergebnisse, die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration zu bestimmen.

Programmieraufgabe 2: (10)
Programmieren Sie das eindimensionale Newtonverfahren in matlab oder octave. Testen Sie Ihr Programm erneut mit der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3$$

aus Aufgabe 4 und berechnen Sie deren Nullstelle. Lassen Sie das Newtonverfahren iterieren, bis die Abbruchbedingung $|x^{(k)} - x^{(k+1)}| < 10^{-7}$ erfüllt ist.
Versuchen Sie erneut, anhand Ihrer Ergebnisse, die Konvergenzordnung zu bestimmen.

Abgabedatum: 26.04.2012, 10 Uhr in den Kasten im Mathematischen Insitut