Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Klawonn
Dipl.-Math. M. Lanser

Sommersemester 2012

03. Mai 2012

4.Übung zur Numerischen Mathematik I

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (8 Punkte)
Es sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

und ein beliebiger Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Gesucht ist die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.
Zeigen Sie: Das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren konvergieren für alle Startwerte $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ genau dann, wenn $|a| < 2$.

Aufgabe 2: (4 + 4 = 8 Punkte)
In der Vorlesung wurden sowohl eine Matrix-Form als auch eine komponentenweise Form des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens eingeführt. In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, daß die beiden Formen jeweils äquivalent sind, also daß mit $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)^T$ gilt:

$$Dx^{(k+1)} + Lx^{(k)} + Rx^{(k)} = b \Leftrightarrow x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}$$

und

$$(D + L)x^{(k+1)} + Rx^{(k)} = b \Leftrightarrow x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii} \,.$$

Die Matrizen D, L, R sind dabei wie in der Vorlesung definiert, d.h. D ist eine Diagonalmatrix, L eine strikte untere und R eine strikte obere Dreiecksmatrix, für die gilt: $A = L + D + R$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Zeigen Sie, daß sich das SOR-Verfahren in der Form:

$$x^{(k+1)} := Bx^{(k)} + c$$

mit $B = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega R)$, $c = \omega(D + \omega L)^{-1}b$ schreiben lässt. Die Matrizen D, L, R sind dabei wie in der Vorlesung definiert (s.a. Aufgabe 2).

Aufgabe 4 (4 + 6 =10 Punkte)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} A_1 & B \\ B^T & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

mit $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i},\ i = 1,2$ und $B \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$. Betrachten Sie die Iterationsverfahren

$$\begin{aligned} A_1 x_1^{(k+1)} &+ & B x_2^{(k)} &= b1 \\ B^T x_1^{(k)} &+ & A_2 x_2^{(k+1)} &= b2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_1 x_1^{(k+1)} &+ B x_2^{(k)} &= b1 \\ B^T x_1^{(k+1)} &+ A_2 x_2^{(k+1)} &= b2. \end{aligned}$$

Finden Sie für jedes der beiden Verfahren hinreichende Bedingungen, so dass das jeweilige Iterationsverfahren konvergiert.

Abgabedatum: 10.05.2012, 10 Uhr, Abgabe der Ausarbeitung in den Kasten im Keller des MI.