Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Klawonn
Dipl.-Math. M. Lanser

Sommersemester 2012

10. Mai 2012

5.Übung zur Numerischen Mathematik I

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (3 + 4 + 3 = 10 Punkte)
In dieser Aufgabe sollen Sie sich mit dem Thema Rundungsfehler beschäftigen.

(i) Nehmen Sie sich 2 beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit 3 Nachkommastellen (z.B. 2,378 und 5,739) und berechnen Sie das Produkt $a \cdot b$. Geben Sie ebenfalls das auf 2 Nachkommastellen gerundete Ergebnis an. Runden Sie anschließend die beiden Zahlen a und b auf 2 Nachkommastellen und berechnen Sie das Produkt der gerundeten Zahlen $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$. Was stellen Sie fest?
Bezeichnen Sie $a = \tilde{a} + \delta a$ und $b = \tilde{b} + \delta b$. Berechnen Sie für allgemeine a, b das Produkt der beiden Zahlen und den Einfluß des Rundens bei der Bildung des Produkts. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis an Ihrem vorher gewählten Beispiel.

(ii) Betrachten Sie die Matrix A und den Vektor b

$$A = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.75 & 1.5 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{2}{9} \\ 0.4 & 1.2 & 3.6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7.25 \\ \frac{8}{3} \\ 13.6 \end{pmatrix}$$

Überprüefen Sie handschriftlich, daß $x = (1, 2, 3)^T$ die Lösung der Aufgabe $Ax = b$ ist. Sei A_i $(i \geq 0)$ die Matrix, die man durch Runden der Einträge von A auf die i-te Nachkommastelle erhält. Lösen Sie die beiden Systeme $A_2 x = b$ und $A_1 x = b$ mit **matlab**. Was fällt Ihnen am Ergebnis auf? (Sie müssen keinen Programmcode abgeben.)

(iii) Es wurden zwei numerische Berechnungen mit **matlab** durchgeführt, die den gleichen Ergebnisvektor hätten liefern müssen. Zieht man aber die beiden erhaltenen Ergebnisse voneinander ab, so erhält man folgende Differenzen :

Eintrag	1.0e-14 *
1	0.04440892098501
2	0.08881784197001
3	-0.00832667268469
4	0.08881784197001
5	0.02220446049250

Was fällt Ihnen auf? Wie kann man sich diese Abweichungen erklären?

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Angenommen ein sehr einfacher Rechner kann nur ein extrem kurzes Gleitkommaformat verwenden. Dieses Format stelle sich dar durch

$$\pm b_0.b_1b_2 \times 2^E$$

mit $b_i \in \{1,0\}$ und $E \in \{-1,0,1\}$. Dabei wird b_0 explizit (nicht versteckt) abgespeichert. Null wird durch 0.00×2^E dargestellt, alle anderen Zahlen sind stets normalisiert. Zeichnen Sie alle in diesem Format darstellbaren Zahlen auf einer Zahlengeraden ein.
Welche Maschinengenauigkeit `eps` hat dieser Rechner? Haben alle Maschinenzahlen den gleichen Abstand?
Bemerkung: Heutige 64-bit Maschinenzahlen stellen sich dar durch

$$1.b_1b_2b_3 \dots b_{52} \times 2^E$$

mit $b_i \in \{0,1\}$ und $E = -1022, \dots, 1023$.

Aufgabe 3: (Programmieraufgabe) (15 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm, dass zur eingegebenen Matrix A und rechter Seite b die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mittels

(i) Gauß-Seidel-Verfahren

(ii) Jacobi-Verfahren

berechnet und bei dem das verwendete Verfahren vom Benutzer gewählt werden kann (der Benutzer soll dafür nicht auf den Programmcode zugreifen müssen). Benutzen Sie dazu die Hilfsroutinen `triu`, `tril` und `diag`, die bereits in matlab und octave implementiert sind. Approximieren Sie damit die Lösungen x der folgenden linearen Gleichungssysteme

(i) das System zum elektrischen Netzwerk aus Kapitel 3.1. der Vorlesung mit $f_1 = 1, f_2 = 2$ und $f_3 = 3$

(ii) $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

und $b = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$.
Vergleichen Sie die verschiedenen Iterationsverfahren für $m = 10, 20, 100$.

Iterieren Sie bis $||r^{(k)}||_2 \leq 10^{-5}$ erreicht ist, wobei $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ ist .

Abgabedatum: 18.05.2012, 10 Uhr in den Kasten im Mathematischen Insitut