

6. Übung zur Numerischen Mathematik I

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Geben Sie mit Begründung an, ob die folgenden Zerlegungen der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

QR -Zerlegungen von A sind.

$$(i) \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(iii) \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: ($4 + 4 = 8$ Punkte)

Sei A^+ die Moore-Penrose Inverse der Matrix A . Zeigen Sie die Aussagen aus Satz 5.4.3:

$$(i) \quad AA^+A = A$$

$$(ii) \quad \text{Ist } A \text{ eine normale } n \times n\text{-Matrix, d.h. } A^T A = A A^T, \text{ so gilt } AA^+ = A^+ A.$$

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Moore-Penrose-Inverse des dyadischen Produkts vu^H mit $u, v \in \mathbb{K}^n$ und $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Der Gezeitenwasserstand der Nordsee werde in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) durch

$$H(t) = h + a \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + b \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

mit unbekannten Konstanten h, a, b beschrieben. Folgende Messwerte liegen vor:

t	0	2	4	6	8	10
H(t)	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

Berechnen Sie h, a und b . Stellen Sie dazu ein überbestimmtes Gleichungssystem auf und lösen Sie es mit der reduzierten QR -Zerlegung. (**handschriftlich**).

Aufgabe 5: (Programmieraufgabe) (12 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie eine reduzierte QR -Zerlegung auf Basis des klassischen Gram-Schmidt Algorithmus programmieren. Die in **matlab** eingebaute QR -Zerlegung `qr` dürfen Sie lediglich benutzen um Ihre Resultate zu überprüfen.

- (i) Schreiben Sie eine Funktion
`function [Q, R] = qr_gram_schmidt(A)`
 um die Matrizen Q und R der QR -Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zu berechnen.
- (ii) Transformieren Sie die **Normalengleichung** zu Aufgabe 4 mit Ihrer QR -Zerlegung auf Dreiecksgestalt und lösen Sie es durch Rückwärtseinsetzen (d.h. ohne den `\`-Operator). Bitte auch `diary` ausdrucken.

Abgabedatum: 24.05.2012, 10 Uhr in den Kasten im Mathematischen Institut