

7. Übung zur Numerischen Mathematik I

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Rang und $b \in \mathbb{R}^m$. Zudem Sei $\|x\|^2 := x^T x$. Zeigen Sie mit Hilfe analytischer Kriterien zur Existenz von Extremalstellen, dass die Minimierungsaufgabe

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

auf die Lösung der Normalgleichungen zurückgeführt werden kann.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Es sei bekannt, dass im linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

die Matrix A und der Vektor b in der $\|\cdot\|_2$ -Norm jeweils mit einem maximalen relativen Fehler von 0.05 behaftet sind.

Welche relative Genauigkeit können Sie dann für x garantieren?

Aufgabe 3: (7 + 3 = 10 Punkte)

- (i) Seien $P_1, \dots, P_n$ Orthogonalprojektionen der Form $P_i := q_i q_i^T$, wobei $q_1, \dots, q_n$ ein Orthonormalsystem ist. Für $i \neq j$ gilt zudem $q_i \neq q_j$. Zeigen Sie, dass gilt

$$I - \sum_{i=1}^n P_i = \prod_{i=1}^n (I - P_i)$$

wobei I die Identität ist.

- (ii) In der Vorlesung wurden die Algorithmen des Gram-Schmidt-Verfahren (GS) und des modifizierten Gram-Schmidt-Verfahren (MGS) eingeführt. Begründen Sie ausführlich, warum die beide Verfahren mathematisch äquivalent sind.

Aufgabe 4: (3 + 4 + 2 = 9 Punkte)

Bei der Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.5001 & 0.7001 & 0.6001 & 0.5001 \\ 0.7001 & 1.0000 & 0.8001 & 0.7001 \\ 0.6001 & 0.8001 & 1.0000 & 0.9001 \\ 0.5001 & 0.7001 & 0.9001 & 1.0000 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.23 \\ 0.32 \\ 0.33 \\ 0.31 \end{pmatrix}$$

erhielt man als erste Näherung

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0.0682 \\ 0.1192 \\ 0.1079 \\ 0.0953 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie das Residuum $r := b - A\hat{x}$.

(ii) Sei B eine Näherung von A^{-1} mit

$$B = \begin{pmatrix} 778.88 & -469.29 & -194.29 & 114.43 \\ -469.77 & 285.84 & 114.93 & -68.97 \\ -194.89 & 114.93 & 56.12 & -33.63 \\ 114.95 & -68.97 & -33.68 & 22.18 \end{pmatrix}.$$

Schätzen Sie den Fehler $\|x - \hat{x}\|_\infty$ ab.

(iii) Überprüfen Sie die Fehlerabschätzung mit Hilfe von **matlab**.

Aufgabe 5 (Programmieraufgabe) (5 + 4 + 6 = 15 Punkte)

In der letzten Programmieraufgabe haben Sie das klassische Gram-Schmidt-Verfahren programmiert (GS). Sie sollen nun sehen, daß das modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren (MGS) tatsächlich bessere numerische Ergebnisse liefern kann, obwohl es mathematisch äquivalent ist.

(i) Programmieren Sie zuerst das modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren. Nennen Sie die Funktion z.B. *qr_gram_schmidt_mod*.

(ii) Schreiben Sie eine Funktion *orth_error*, die für eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ quantitativ angibt, wie stark die Spalten von X von einem Orthonormalsystem abweichen. Benutzen Sie dazu die folgende Abbildung

$$\text{orth_error} : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow [0, \infty), \quad \text{orth_error}(X) := \|X^T X - I\|_F^2,$$

wobei I die $n \times n$ Einheitsmatrix bezeichne. Die Frobenius-Norm $\|X\|_F$ von $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist definiert durch

$$\|X\|_F := \left(\sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} X_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(iii) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

heißt eine Vandermonde-Matrix. Dabei ist $x \in \mathbb{R}^n$. Benutzen Sie die Funktion

```
function [V]= vandermonde(n)
```

```
x = 1:n;
for j = 1:n
    V(:,j) = x.^(j-1);
end
```

um eine Vandermondematrix $V(n)$ beliebiger Größe n zu erstellen. Schreiben Sie ein Programm, das für $n = 5, 10, \dots, 150$ die Q -Faktoren von $V(n)$ per

- (1) Gram-Schmidt Algorithmus
- (2) Modifiziertem Gram-Schmidt Algorithmus
- (3) *qr*-Funktion aus **matlab**

berechnet. Die Fehlerindikatoren $e_k = \text{orth_error}(Q_k)$, $k = 1, 2, 3$ der drei Verfahren sollen (in der genannten Reihenfolge) als Zeilen einer Tabelle in Exponentialdarstellung ausgegeben werden:

```
fprintf('%d: %e %e %e\n',n, e1, e2, e3);
```

Vergleichen Sie die drei Verfahren (schriftlich).

Hinweis: Alle 3 Verfahren brechen auf meinem Rechner bei $n = 145$ zusammen, d.h. sie liefern *NaN*-Einträge.

Abgabedatum: 08.06.2012, 10 Uhr in den Kasten im Mathematischen Insitut