

8. Übung zur Numerischen Mathematik I

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (5 + 5 = 10 Punkte)
Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.001 & -2.3 \\ -1.35 & 0.03 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.295 \\ -6.72 \end{pmatrix}$$

besitzt die exakte Lösung $x_1 = 5$ und $x_2 = 1$.

Sie sollen dieses Gleichungssystem nun selbst lösen. Allerdings stehen Ihnen für Ihre Rechnung nur 3 Stellen zur Verfügung. Das bedeutet, dass jede Zahl in Exponentialschreibweise betrachtet wird, und zwar wie folgt:

$$\pm 0.x_1x_2x_3 \cdot 10^E \quad (x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1, \dots, 9\}, x_1 \neq 0, E \in \mathbb{Z})$$

Sollte eine Zahl mehr Stellen benötigen, wird sie einfach abgeschnitten (z.B. $12.45 \Rightarrow 0.124 \cdot 10^2$).

Berechnen Sie die Lösung mit dieser Zahlendarstellung und dem Gauß-Algorithmus

(i) ohne Spaltenpivotsuche.

(ii) mit Spaltenpivotsuche.

Gibt es einen Unterschied?

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $n \leq m$ und $\text{rang}(A) = n$. Weiterhin sei $0 < r < \frac{2}{\sigma_1^2}$, wobei σ_1^2 der größte Eigenwert von $A^T A$ ist. Zeigen Sie, dass die Iteration

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - rA^T(Ax^{(k)} - b)$$

für jede Wahl von $x^{(0)}$ und b gegen eine Lösung des linearen Ausgleichproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2$$

konvergiert.

Aufgabe 3: (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)

- (i) Zeigen Sie für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^H A),$$

wobei $A^H := \overline{A}^T$ und $\rho(A^H A)$ der Spektralradius von $A^H A$ ist.

- (ii) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine hermitesche Matrix mit betragsmäßig größtem Eigenwert $\lambda_{\max}$ und betragsmäßig kleinstem Eigenwert $\lambda_{\min}$. Zeigen Sie, dass sich die Kondition $\kappa = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$ dann auch wie folgt schreiben lässt:

$$\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

- (iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\kappa_2(A^T A) = (\kappa_2(A))^2$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe) (10 + 5 = 15 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie den Householderalgorithmus implementieren. Sie dürfen die in Matlab eingebaute *qr*-Zerlegung lediglich zum Testen Ihrer Routine (z.B. an Zufallsmatrizen: *rand(n)*) verwenden.

- (i) Programmieren Sie eine QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit dem Householderverfahren. Nennen Sie die Funktion z.B. *qr_householder*.
- (ii) Erweitern Sie den Güte-Vergleich aus der 7. Übung um Ihre *qr_householder* Funktion und vergleichen Sie auf diese Weise das Householderverfahren mit dem Gram-Schmidt-Verfahren anhand der Vandermonde-Matrix.

Abgabedatum: 14.06.2012, 10 Uhr in den Kasten im Mathematischen Institut