Universität zu Köln Sommersemester 2012

Prof. Dr. A. Klawonn
Dipl.-Math. M. Lanser 14. Juni 2012

9. Übung zur Numerischen Mathematik I

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (3 + 3 + 4 = 10 Punkte)
Die invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitze eine LR-Zerlegung mit $l_{ii} = 1, i =$

$1, \dots n$. Zeigen Sie:

(i) Die Matrizen L und R sind eindeutig bestimmt.

(ii) Ist A eine obere Hessenberg-Matrix, d.h. $a_{ij} = 0$ für $i - j > 1$ so kann man die LR-Zerlegung in $\frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n)$ Flops berechnen. Geben Sie allgemein die Form einer Hessenberg-Matrix an.

(iii) Ist A eine Bandmatrix mit Bandbreite m, d.h. $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > m$, so gilt dies auch für L und R. Geben Sie auch hier eine allgemeine Bandmatrix an.

Aufgabe 2: (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)
Zu lösen sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \hat{R} & v \\ u^T & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $\hat{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist, $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $x, b \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(i) Geben Sie eine LR-Zerlegung der Matrix A an.

(ii) Zeigen Sie: A ist nichtsingulär genau dann, wenn

$$u^T \hat{R}^{-1} v \neq 0.$$

(iii) Formulieren Sie einen Algorithmus zur Lösung des obigen LGS, der möglichst wenig Flops benötigt.

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertierbare Matrizen und $U, V \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Weiterhin sei

$$M = \begin{bmatrix} A & U \\ V^T & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

eine invertierbare Matrix und deren Inverse von der Form

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}.$$

Beweisen Sie die folgende Identität nach Schur und Woodbury

$$(A - UD^{-1}V^T)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(D - V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}.$$

Leiten Sie dazu Darstellungen für E, F, G und H her.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe, 2 Wochen Bearbeitungszeit) ($9 + 3 + 3 = 15$ Punkte)

(i) Programmieren Sie eine Funktion *lr* mit der Signatur:

function [L R P] = lr(A) ,

die eine LR-Zerlegung der Form $PA = LR$ von A mit Spaltenpivotsuche berechnet. Dabei ist P eine Permutationsmatrix.

(ii) Lösen Sie damit das Problem $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei

$$a_{ij} = \frac{1}{(i+j-1)} \qquad \text{und} \qquad b_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+j-1)}, \quad \text{für } i, j = 1 \ldots n.$$

Testen Sie Ihr Programm für $n = 5, 10, 25, 100$, indem Sie $||r||_2$ des Residuums ausgeben.

(iii) Berechnen Sie die Lösung des Systems $W_n x = b$, wobei $W_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Wilkinson-Matrix der Form

$$W_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

sei und $b = (1, \ldots, n)^T$ sei. Lösen Sie das System für $n = 10, 50, 100, 200$. Berechnen Sie jeweils das absolute und das relative Residuum in der $||\cdot||_\infty$-Norm. Was können Sie über die Güte der Lösungen $\tilde{x}$ für die gewählten n aussagen? Sind die $\tilde{x}$ rückwärtsstabil berechnet worden? Für diese Teilaufgabe ist es Ihnen freigestellt die *lu*-Funktion aus **matlab** zu verwenden.

Abgabedatum: 21.06.2012, 10 Uhr in den Kasten im Mathematischen Insitut
Abgabedatum Programm: 28.06.2012, 10 Uhr