

Übungen (1)

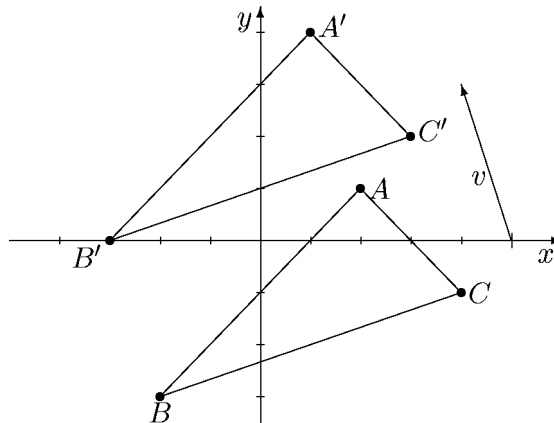
- 1) Gegeben sind die Punkte $A = (2, 1)$, $B = (-2, -3)$ und $C = (4, -1)$.
- Skizzieren Sie diese drei Punkte in einem Koordinatensystem.
 - Verschieben Sie das Dreieck ABC um den Vektor $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eckpunkte A' , B' , C' des verschobenen Dreiecks.
 - Überprüfen Sie Ihre Zeichnung durch eine entsprechende Rechnung.
 - Bestimmen Sie die Vektoren \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} sowie die entsprechenden Vektoren $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$. Was stellen Sie fest?
- 2) Gegeben sind die Punkte $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$ und $C = (4, 1, 2)$ im dreidimensionalen Raum. Berechnen Sie die Vektoren

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}), \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}.$$

- 3) Es seien A , B und C drei beliebige Punkte. Zeigen Sie auf der Basis der Definition von Vektoraddition und skalarer Multiplikation:
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$,
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \mathbf{o}$,
 - $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,
 - $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,
- 4) Gegeben ist der Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Stellen Sie u in einem Koordinatensystem als Pfeil mit Anfangspunkt $O = (0, 0)$ dar.
 - Stellen Sie die Vektoren $2u$, $3u$, $\frac{1}{2}u$, $-u$, $-2u$, $-2,5u$, $0u$ ebenso dar. Wo liegen die Endpunkte?
 - Wo liegen die Endpunkte, wenn man als Anfangspunkt $A = (-1, 1)$ wählt?
 - Gehören die Punkte $X = (2, \frac{5}{2})$ und $Y = (25, 13)$ zu dem in c) gefundenen geometrischen Gebilde?
- 5) Wir betrachten nun die Gerade g durch den Punkt $A = (-2, 2, 0)$ mit dem Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Punkte auf der Geraden g liegen: $P = (32, 19, -17)$, $Q = (-18, -7, 9)$, $R = (8, 7, -5)$.

Übungen (1) — Lösungen

1) Skizze zu a), b):



c) Die Eckpunkte des verschobenen Dreiecks sind charakterisiert durch

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Man muß also die Endpunkte von Pfeilen bestimmen, wenn der Anfangspunkt und der Vektor gegeben sind. Nun gilt (mit den Bezeichnungen $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $A = (a_1, a_2)$ und entsprechend für A'):

$$v = \overrightarrow{AA'} \iff \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 - a_1 \\ a'_2 - a_2 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} v_1 = a'_1 - a_1 \\ \wedge v_2 = a'_2 - a_2 \end{matrix}.$$

Damit lassen sich die Koordinaten a'_i von A' sofort berechnen:

$$a'_1 = a_1 + v_1, \quad a'_2 = a_2 + v_2.$$

Mit den konkret gegebenen Punkten erhält man so

$$A' = (1, 4), \quad B' = (-3, 0) \quad \text{und} \quad C' = (3, 2).$$

d) Man stellt fest

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{A'B'}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{B'C'} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{C'A'}.$$

Bei Verschiebung ändern sich zwar die Punkte, nicht aber die Vektoren!

$$2) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = o$$

(Nullvektor). (Zu den letzten beiden Gleichungen siehe auch die nächste Aufgabe.)

3) Gemäß der Definition der Vektorsumme gilt $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ sowie $-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$. Daraus ergibt sich mit den Rechengesetzen für Vektoren:

a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = o$.

c) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

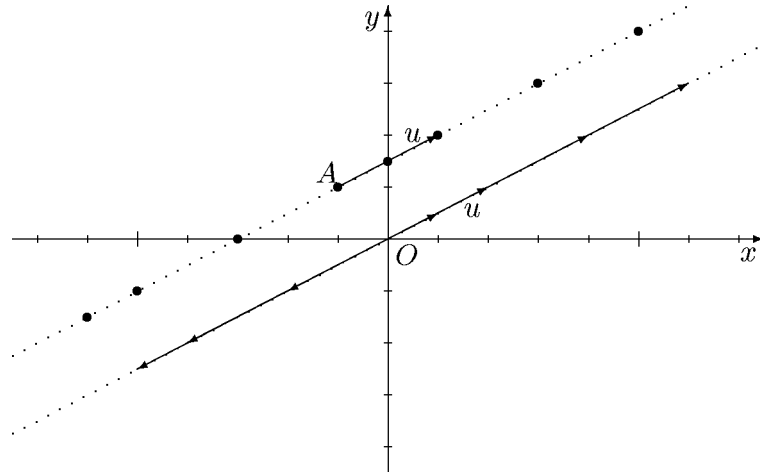
d) Hier kann man die beiden Seiten der Behauptung nicht einfacher darstellen; vielmehr formt man

die Vektorgleichung unter Verwendung der Rechengesetze für Vektoren *äquivalent* um, z. B. indem man auf beiden Seiten $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ addiert:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist nun tatsächlich wahr (nach Definition der Vektoraddition), also auch die ursprüngliche Behauptung.

4) Skizzen zu a) – c):



b) Alle Endpunkte liegen auf einer Geraden g durch den Punkt O . Dabei gibt der Vektor u die Richtung dieser Geraden an, man nennt ihn daher *einen Richtungsvektor* von g .

c) Wieder ergibt sich eine Gerade, jetzt jedoch durch A statt O ; wieder ist u Richtungsvektor der Geraden.

d) Damit X zu der Geraden aus c) gehört, muß der Vektor \overrightarrow{AX} dieselbe Richtung (ohne Orientierung) wie u haben. Dies bedeutet, daß \overrightarrow{AX} ein *Vielfaches* ru von u sein muß ($r \in \mathbb{R}$). Aus der Skizze bzw. der nachfolgenden Rechnung entnimmt man $r = 3/2$: X liegt auf der Geraden aus c).

$$\overrightarrow{AX} = ru \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix}.$$

Zwei Spaltenvektoren stimmen genau dann überein, wenn sie in *allen* ihren Koordinaten übereinstimmen. Damit ist die letztgenannte Vektorgleichung nichts anderes als das folgende System aus zwei linearen Gleichungen für r :

$$\begin{aligned}2r &= 3 \\ \wedge \quad r &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

mit der offensichtlichen Lösung $r = 3/2$.

Genauso geht man für Y vor, wobei man auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2r &= 26 \\ \wedge \quad r &= 12\end{aligned}$$

geführt wird, welches offensichtlich unlösbar ist. Es gibt also kein derartiges r : Y liegt nicht auf der Geraden.

5)

$$\overrightarrow{AP} = rv \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 34 \\ 17 \\ -17 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} 34 &= 2r \\ \wedge \quad 17 &= r \\ \wedge \quad -17 &= -r \end{aligned} \Leftrightarrow r = 17,$$

also liegt P auf g . Genauso zeigt man, daß R zu g gehört: $\overrightarrow{AR} = 5v$. Für Q hingegen erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}-16 &= 2r \\ \wedge \quad -9 &= r, \\ \wedge \quad 9 &= -r\end{aligned}$$

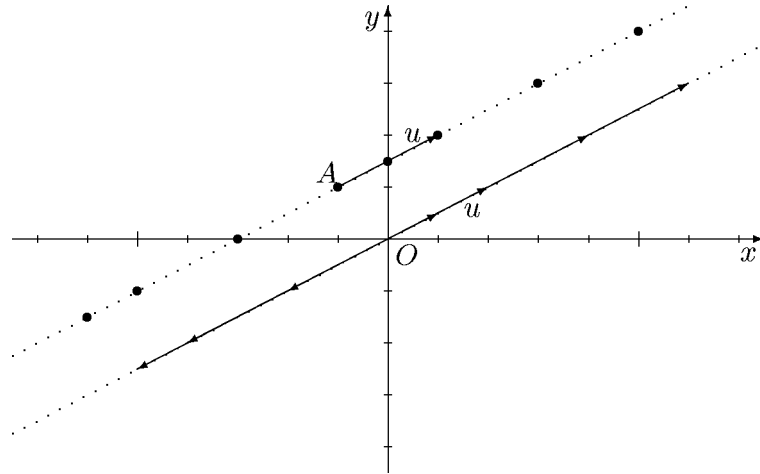
welches offenbar unlösbar ist: Q liegt nicht auf der Geraden g .

die Vektorgleichung unter Verwendung der Rechengesetze für Vektoren *äquivalent* um, z. B. indem man auf beiden Seiten $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ addiert:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist nun tatsächlich wahr (nach Definition der Vektoraddition), also auch die ursprüngliche Behauptung.

4) Skizzen zu a) – c):



b) Alle Endpunkte liegen auf einer Geraden g durch den Punkt O . Dabei gibt der Vektor u die Richtung dieser Geraden an, man nennt ihn daher *einen Richtungsvektor* von g .

c) Wieder ergibt sich eine Gerade, jetzt jedoch durch A statt O ; wieder ist u Richtungsvektor der Geraden.

d) Damit X zu der Geraden aus c) gehört, muß der Vektor \overrightarrow{AX} dieselbe Richtung (ohne Orientierung) wie u haben. Dies bedeutet, daß \overrightarrow{AX} ein *Vielfaches* ru von u sein muß ($r \in \mathbb{R}$). Aus der Skizze bzw. der nachfolgenden Rechnung entnimmt man $r = 3/2$: X liegt auf der Geraden aus c).

$$\overrightarrow{AX} = ru \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix}.$$

Zwei Spaltenvektoren stimmen genau dann überein, wenn sie in *allen* ihren Koordinaten übereinstimmen. Damit ist die letztgenannte Vektorgleichung nichts anderes als das folgende System aus zwei linearen Gleichungen für r :

$$\begin{aligned}2r &= 3 \\ \wedge \quad r &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

mit der offensichtlichen Lösung $r = 3/2$.

Genauso geht man für Y vor, wobei man auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2r &= 26 \\ \wedge \quad r &= 12\end{aligned}$$

geführt wird, welches offensichtlich unlösbar ist. Es gibt also kein derartiges r : Y liegt nicht auf der Geraden.

5)

$$\overrightarrow{AP} = rv \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 34 \\ 17 \\ -17 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} 34 &= 2r \\ \wedge \quad 17 &= r \\ \wedge \quad -17 &= -r \end{aligned} \Leftrightarrow r = 17,$$

also liegt P auf g . Genauso zeigt man, daß R zu g gehört: $\overrightarrow{AR} = 5v$. Für Q hingegen erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}-16 &= 2r \\ \wedge \quad -9 &= r, \\ \wedge \quad 9 &= -r\end{aligned}$$

welches offenbar unlösbar ist: Q liegt nicht auf der Geraden g .

Übungen (2)

- 1) Der *Mittelpunkt* zwischen zwei Punkten A, B wird definiert durch:

$$M \text{ Mittelpunkt von } A, B \iff \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

- a) Zeigen Sie für jeden beliebigen Punkt P :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$$

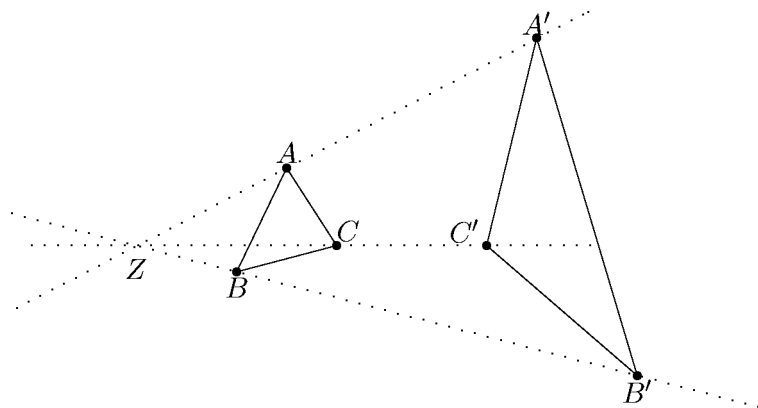
- b) Wählt man $P = O$ als Koordinatenursprung, so erhält man:

$$M \text{ Mittelpunkt von } A, B \iff \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Dies bedeutet, daß der Ortsvektor \overrightarrow{OM} des Mittelpunktes M zwischen A und B das arithmetische Mittel der Ortsvektoren \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OB} von A und B ist.

Man bestimmt also die Koordinaten des Mittelpunktes M von A und B , indem man die Koordinaten von A und B addiert und halbiert!

- 2) Gegeben sind die Punkte $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, -1)$, $C = (4, 1, 2)$ sowie $A' = (5, 4, -3)$, $B' = (2, 0, 0)$, $C' = (7, 2, 3)$.
- Berechnen Sie die Mittelpunkte der Seiten der Dreiecke ABC und $A'B'C'$.
 - Die *Seitenhalbierenden* eines Dreiecks sind die Geraden durch eine Ecke und den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt. Bestimmen Sie Parameterdarstellungen für die drei Seitenhalbierenden beider Dreiecke.
 - Bestätigen Sie an beiden Dreiecken, daß sich die drei Seitenhalbierenden in einem einzigen Punkt schneiden. Dies ist der sog. *Schwerpunkt* des Dreiecks. Bestimmen Sie ihn für beide Dreiecke.
- 3) Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ nennt man *perspektivisch*, wenn sich die drei Verbindungsgeraden einander entsprechender Ecken in *einem* Punkt, dem sog. *Zentrum* Z , schneiden:



- Zeigen Sie, daß die beiden oben angegebenen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspektivisch sind und bestimmen Sie das *Zentrum* Z .
- Stellen Sie fest, ob auch die Geraden durch die Schwerpunkte der Dreiecke durch Z verlaufen.
- Bestimmen Sie die Schnittpunkte einander entsprechender Seiten der beiden Dreiecke.
- Zeigen Sie, daß die so gefundenen drei Schnittpunkte wiederum auf einer Geraden liegen!

Übungen (2) — Lösungen

1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \iff \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} \\ &\iff \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} \\ &\iff \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

2) a) Wir bezeichnen den der Ecke A, B, \dots gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt mit A_m, B_m, \dots . Unter Verwendung der vorangehenden Aufgabe erhält man

$$\begin{aligned}A_m = M_{BC} &= \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad B_m = M_{AC} = (3, 1, 1), \quad C_m = M_{AB} = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \\ A'_m = M_{B'C'} &= \left(\frac{9}{2}, 1, \frac{3}{2}\right), \quad B'_m = M_{A'C'} = (6, 3, 0), \quad C'_m = M_{A'B'} = \left(\frac{7}{2}, 2, -\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

b) Als Parameterdarstellungen der Seitenhalbierenden erhält man für das Dreieck ABC :

$$\begin{aligned}g(A, A_m) : \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AA_m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbf{R}), \\ g(B, B_m) : \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BB_m} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbf{R}), \\ g(C, C_m) : \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CC_m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R}).\end{aligned}$$

c) Schnitt $g(A, A_m) \cap g(B, B_m)$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} \frac{3}{2}r & = & 1 \\ -\frac{1}{2}r - s & = & -1 \\ \frac{1}{2}r - 2s & = & -1 \end{bmatrix} \\ \iff \begin{bmatrix} r & = & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} + s & = & 1 \\ \frac{1}{3} - 2s & = & -1 \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} r & = & \frac{2}{3} \\ s & = & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} & = & -1 \end{bmatrix} \iff r = s = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Die beiden Seitenhalbierenden $g(A, A_m)$ und $g(B, B_m)$ schneiden sich also und der Schnittpunkt S hat den Ortsvektor

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA_m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Man kann zwei andere Seitenhalbierende zum Schnitt bringen und feststellen, daß diese denselben Schnittpunkt haben. Es ist jedoch einfacher, zu überprüfen, daß der gefundene Punkt S auch auf der dritten Seitenhalbierenden liegt:

$$\begin{aligned}S \in g(C, C_m) &\iff \overrightarrow{CS} = t \cdot \overrightarrow{CC_m} \text{ für ein } t \in \mathbf{R} \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 \\ -1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} \text{ für ein } t \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Als Lösung läßt sich unschwer $t = 2/3$ erkennen. Für das Dreieck $A'B'C'$ erhält man als Schwerpunkt $S' = (\frac{14}{3}, 2, 0)$. (Die jeweiligen Parameterwerte sind ebenfalls immer $2/3$! Was bedeutet das?)

3) a) Parameterdarstellungen der drei Verbindungsgeraden entsprechender Dreieckspunkte:

$$g(A, A') : \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}),$$

$$g(B, B') : \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}),$$

$$g(C, C') : \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Schnittpunkt von $g(A, A')$ und $g(B, B')$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} 3r + s = 1 \\ 3r = -1 \\ -3r - s = -1 \end{bmatrix} \\ \iff \begin{bmatrix} 3r & = -1 \\ -1 + s & = 1 \\ 1 - s & = -1 \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} r & = -\frac{1}{3} \\ s & = 2 \\ -s & = -2 \end{bmatrix} \iff r = -\frac{1}{3} \wedge s = 2 \end{aligned}$$

Damit schneiden sich die beiden Geraden in genau einem Punkt Z ; dieser hat den Ortsvektor ($s = 2$ in die Parameterdarstellung von $g(B, B')$ einsetzen)

$$\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man muß nun zeigen, daß die Gerade $g(C, C')$ ebenfalls durch $Z = (1, 0, 1)$ verläuft. Dies ist der Fall, wenn für ein $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist $t = -1$ eine Lösung; alle drei Geraden schneiden sich in dem einen Punkt $Z = (1, 0, 1)$.

b) Die Schwerpunkte der beiden Dreiecke sind (siehe oben) $S = (3, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ sowie $S' = (\frac{14}{3}, 2, 0)$. Z liegt auf der Geraden $g(S, S')$, wenn \overrightarrow{SZ} ein Vielfaches des Richtungsvektors $\overrightarrow{SS'}$ ist:

$$\overrightarrow{SZ} = r \overrightarrow{SS'} \iff \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung ist unlösbar; Z und die beiden Schwerpunkte liegen nicht auf einer Geraden.

c) Man erhält $S_1 = (17/7, 4/7, -3/7)$ als Schnittpunkt von $g(A, B)$ mit $g(A', B')$, $S_2 = (8, 1, 6)$ als Schnittpunkt von $g(A, C)$ mit $g(A', C')$ und schließlich $S_3 = (11/3, 2/3, 1)$ als Schnittpunkt von $g(B, C)$ mit $g(B', C')$.

d) Diese drei Punkte S_i liegen auf einer Geraden, da die beiden Vektoren

$$\overrightarrow{S_2S_1} = \begin{pmatrix} -39/7 \\ -3/7 \\ -45/7 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{S_2S_3} = \begin{pmatrix} -13/3 \\ -1/3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Vielfache voneinander sind: $\frac{7}{9} \overrightarrow{S_2S_1} = \overrightarrow{S_2S_3}$.

Übungen (3)

Gegeben sind wieder die Punkte $A = (2 \mid 1 \mid 0)$, $B = (3 \mid 0 \mid -1)$ und $C = (4 \mid 1 \mid 2)$ (vgl. Übungen (2)) sowie drei weitere Punkte $D = (3 \mid 2 \mid 3)$, $E = (-1 \mid 2 \mid 1)$, $F = (0 \mid 1 \mid 2)$.

- 1) a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene e durch die Punkte A, B, C an.
b) Stellen Sie fest, welche der Punkte D, E, F in der Ebene e liegen.
- 2) a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene e' , die durch den Punkt E verläuft und *parallel* zur Ebene $e(A, B, C)$ ist.
b) Untersuchen Sie, ob die Gerade $g(C, F)$ die Ebene e' schneidet, und wenn ja, in welchem Punkt.
- 3) Gesucht ist der Durchschnitt der Ebene $e = e(A, B, C)$ mit der Ebene $e'' = e(C, E, F)$.
 - a) Welches Ergebnis erwarten Sie aufgrund Ihrer geometrischen Anschauung?
 - b) Reduzieren Sie das Problem auf ein lineares Gleichungssystem. Wieviele Gleichungen und wieviele Unbekannte umfaßt es?
 - c) Wieviele Lösungen erwarten Sie für dieses Gleichungssystem aufgrund Ihrer Antwort zu a)?

Übungen (3) — Lösungen

- 1) a) Eine Parameterdarstellung für die Ebene durch drei gegebene Punkte
- A, B, C
- erhält man durch

$$X \in e(A, B, C) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \quad (r, s \in \mathbb{R}).$$

In unserem konkreten Fall also

$$X \in e \iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

- b) Um zu überprüfen, ob ein Punkt (etwa
- E
-) in dieser Ebene liegt, muß man untersuchen, ob sein Ortsvektor sich in der Form (*) darstellen läßt, d. h. ob die Gleichung

$$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (**)$$

(mindestens) eine Lösung (r, s) hat. Die Vektorgleichung (**) ist ein lineares Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten (r, s) :

$$\begin{bmatrix} r + 2s = -3 \\ -r = 1 \\ -r + 2s = 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} r = -1 \\ -1 + 2s = -3 \\ 1 + 2s = 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} r = -1 \\ 2s = -2 \\ 2s = 0 \end{bmatrix}$$

Die letzten beiden Gleichungen für s widersprechen einander: Es gibt also keine Lösung! Damit liegt der Punkt E nicht in der Ebene e .

Für F erhält man mit einer entsprechenden Rechnung ebenfalls: F liegt nicht in der Ebene e . Für den Punkt D erhält man die eindeutige Lösung $r = -1, s = 1$.

- 2) a) Da die Ebene
- e'
- parallel zur Ebene
- $e = e(A, B, C)$
- verlaufen soll, können wir als Richtungsvektoren für
- e'
- dieselben wie für
- e
- wählen, nämlich

$$u = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da e' durch E verlaufen soll, erhalten wir als Parameterdarstellung für e' :

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OE} + ru + sv = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Parameterdarstellung für die Gerade
- $g(C, F)$
- :
- $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- .

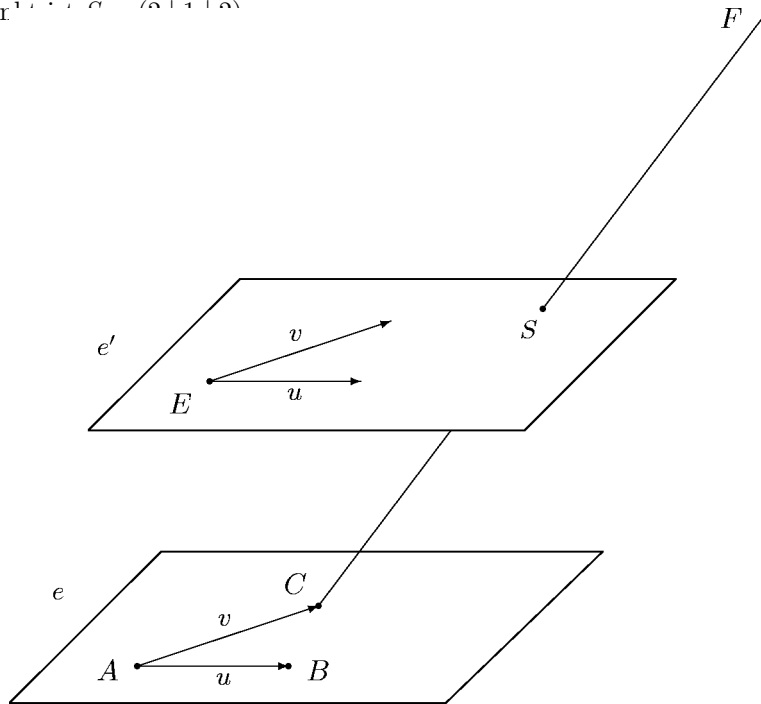
Bestimmung des Durchschnitts $g(C, F) \cap e'$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} r + 2s + 4t = 5 \\ -r = -1 \\ -r + 2s = 1 \end{bmatrix} \\ \iff \begin{bmatrix} r = 1 \\ 2s = r + 1 \\ 4t = 5 - r - 2s \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} r = 1 \\ 2s = 2 \\ 4t = 2 \end{bmatrix} \iff r = 1, s = 1, t = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Da das Gleichungssystem lösbar ist, gibt es einen Schnittpunkt S . Diesen erhält man, indem man in *eine* der beiden Parameterdarstellung den entsprechenden gefundenen Parameterwert einsetzt. Dafür bietet sich die Parameterdarstellung der Geraden an:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt S ist $(2|1|2)$.



- 3) a) Da der Punkt C in beiden Ebenen e und e'' liegt, die Punkte E und F aber nicht zu e gehören, sind die beiden Ebenen verschieden, aber nicht parallel. Die beiden Ebenen haben daher eine komplette Gerade gemeinsam.

b) Parameterdarstellung für e (siehe oben):

$$X \in e \iff \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Parameterdarstellung für $e'' = e(C, E, F)$:

$$X \in e'' \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OC} + p\overrightarrow{CE} + q\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durchschnitt $e \cap e''$ der beiden Ebenen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} -5p - 4q - r - 2s = -2 \\ p + r = 0 \\ -p + r - 2s = -2 \end{bmatrix}$$

Es handelt sich hierbei um ein lineares Gleichungssystem mit *drei* Gleichungen und *vier* Unbekannten.

c) Gemäß a) sind *unendlich* viele Lösungen zu erwarten.

Übungen (4)

1) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{bmatrix} x + 2y + z = 1 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 7 \end{bmatrix}, & \text{b)} \begin{bmatrix} 2x + y - 2z = -6 \\ y + z = 0 \\ 3x - 2z = 1 \end{bmatrix}, \\ \text{c)} \begin{bmatrix} 3x + 4y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{bmatrix}, & \text{d)} \begin{bmatrix} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ x + y = 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

2) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 4x + 3y - 3z - 8u = -10 \\ x - y + z + 4u = 13 \\ -4x - 2y + z + 3u = -3 \\ 3x - y - 2z - 7u = -6 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} x - y + z - u = 0 \\ x + y - z - u = 6 \\ x - y - z + u = -2 \\ 2x + y - 2z + 3u = 0 \end{bmatrix}.$$

3) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{bmatrix} x - y + z = 6 \\ 2x + 4y - z = -3 \\ -x - 2y + 3z = 9 \end{bmatrix}, & \text{b)} \begin{bmatrix} 3x - y + z = 1 \\ -2x + 4y - z = -2 \\ x + 3y = -1 \end{bmatrix}, \\ \text{c)} \begin{bmatrix} 2x + 3y - 4z = -2 \\ -x + 4y + z = -10 \\ x + y + 5z = 0 \end{bmatrix}, & \text{d)} \begin{bmatrix} x - y + 2z = 9 \\ -x + 2y - z = 6 \\ y + z = 4 \end{bmatrix}, \\ \text{e)} \begin{bmatrix} 4x - 2y + z = 2 \\ -12x + 6y - 3z = -6 \\ -8x + 4y - 2z = -4 \end{bmatrix}, & \text{f)} \begin{bmatrix} -x + y - z = -4 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ -4x - 4y + 2z = 6 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Bestimmen Sie – wenn möglich – Parameterdarstellungen für die Lösungsmengen. Was stellen die Lösungsmengen geometrisch dar?

4) Bestimmen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix und die Lösungsanzahl der folgenden Gleichungssysteme. Bestimmen Sie ggf. eine Parameterdarstellung für die Lösungsmenge.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{bmatrix} x + y + z = 3 \\ y + z + u = 3 \\ x - y - z + u = 0 \\ x + 2y + 2z + u = 6 \end{bmatrix}, & \text{b)} \begin{bmatrix} x + y + z = 3 \\ y + z + u = 3 \\ x - y - z + u = 0 \\ x - 2y + 2z + u = -2 \end{bmatrix}, \\ \text{c)} \begin{bmatrix} x + y + z + u = 10 \\ -x + 2y = 3 \\ -2y + 3z = 5 \\ 3z - 4u = -7 \end{bmatrix}, & \text{d)} \begin{bmatrix} x - y + z - u = 1 \\ 2x + y - 2z + 3u = 10 \\ -x - 2y + 3z - 4u = -9 \\ 3x - z + 2u = 11 \end{bmatrix}. \end{array}$$

5) Lösen Sie die nachfolgenden linearen Gleichungssysteme. Überlegen Sie sich vor der Rechnung, welche Möglichkeiten es für den Rang r gibt und was dies für die Lösbarkeit bzw. Lösungsanzahl bedeutet.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{bmatrix} 6x - 3y + 2z = -6 \\ -3x + 9y + 4z = 18 \\ 12y + 8z = 24 \\ 3x - 6y + 6z = 12 \end{bmatrix}, & \text{b)} \begin{bmatrix} x + y + 2z = 5 \\ -3x - 4y + z = -1 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2y - 3z = 2 \end{bmatrix}, \\ \text{c)} \begin{bmatrix} x + y - z - u = -1 \\ x - y + z + u = 3 \\ -3x + 3y - 3z - 3u = -7 \end{bmatrix}, & \text{d)} \begin{bmatrix} x - y + z - u = 3 \\ 2x + y - z + u = 9 \\ -x + 3y - 2z - u = 0 \end{bmatrix}, \\ \text{e)} \begin{bmatrix} x - y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{bmatrix}, & \text{f)} \begin{bmatrix} x + y = 5 \\ z - u = 3 \\ y + z = 4 \end{bmatrix}, \quad \text{g)} \begin{bmatrix} x - 2y - 3z + u = 4 \\ 2x + y - z + 2u = -2 \\ 3x - y - 4z + 3u = 3 \end{bmatrix}, \\ \text{h)} \begin{bmatrix} x - 2y - 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \\ x + 3y + z = 0 \end{bmatrix}, & \text{i)} \begin{bmatrix} -2x - y + z = -2 \\ 4x + 2y - 2z = 6 \\ 7y - 5z + 4w = 2 \end{bmatrix}. \end{array}$$

- 6) Auf einer Kleinkunsthöhne tritt ein Rechenkünstler auf. Er fordert die Zuschauer auf, sich drei Zahlen (x, y, z) zu denken und ihm nur die Summen (A, B, C) von je zweien dieser Zahlen zu nennen. Er nennt dann unmittelbar die drei gedachten Zahlen.
- a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, das der Rechenkünstler lösen muß. Lösen Sie es für
- 1) $A = 6, B = 9, C = 11,$
 - 2) $A = 13, B = 17, C = 18.$
- b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für *beliebige* A, B, C und ermitteln Sie so eine Lösungsformel zur Bestimmung von x, y, z .
- c) Der Rechenkünstler verrät seinen ‘Trick’: Er addiert $A + B + C$ und halbiert das Ergebnis. Von diesem Wert subtrahiert er dann jeweils eine der Zahlen A, B, C und erhält dabei die drei gedachten Zahlen x, y, z . Vergleichen Sie mit Ihrer Lösungsformel aus b).
- d) Der Rechenkünstler ändert die Fragestellung. Die Zuschauer sollen von den gedachten Zahlen (x, y, z) je zwei addieren und die dritte subtrahieren. Wie berechnet man jetzt aus den mitgeteilten Ergebnissen P, Q, R die gedachten Größen?

Übungen (4) — Lösungen

- 1) Alle Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar. Die Lösungspunkte sind jeweils:
 a) $(2, -1, 1)$, b) $(3, -4, 4)$, c) $(0, 0, 0)$, d) $(1, 0, 1)$.
- 2) Wieder sind alle Gleichungssysteme eindeutig lösbar. Die Lösungspunkte sind:
 a) $(x, y, z, u) = (3, -1, 1, 2)$, b) $(x, y, z, u) = (1, 2, -1, -2)$.
- 3) a), c) und f) sind eindeutig lösbar. Die Lösungspunkte sind $(2, -1, 3)$ für a), $(2, -2, 0)$ für c) und $(1, -2, 1)$ für f).
 b) Dieses Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Gauß-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & -4 \\ 0 & 10 & -1 & -4 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die letzte Gleichung $0 = 0$ ist selbstverständlich erfüllt. Die übrigen Gleichungen löst man 'von unten nach oben' auf. Die erste dabei aufzulösende Gleichung $10y - z = -4$ enthält *zwei* Variable, man kann daher auswählen, nach welcher man auflösen will. Hier bietet sich z an.

$$10y - z = -4 \iff z = 10y + 4.$$

Die letzte Gleichung besagt, daß y beliebige Werte annehmen kann, dann jedoch $z = 10y + 4$ gewählt werden muß, z ist also durch y bestimmt. Man löst nun die noch verbleibende Gleichung nach der noch *verbleibenden* Variablen x auf (nicht etwa nach z oder y !):

$$3x - y + (10y + 4) = 1 \iff 3x = -9y - 3 \iff x = -3y - 1.$$

Die Lösungsvektoren haben also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y - 1 \\ y \\ 10y + 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit beliebigem } y \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungsmenge ist daher unendlich. Indem man den Lösungsvektor zerlegt in die Vielfachen von y und die ' y -freien' Teile, erhält man die folgende Parameterdarstellung für die Lösungsmenge L :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y - 1 \\ y \\ 10y + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Die Lösungsmenge ist also die Gerade durch den Punkt $(-1 \mid 0 \mid 4)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

d) ist unlösbar, denn die Gauß-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array} \right).$$

Die letzte Gleichung enthält einen Widerspruch $0 = -11$, so daß keine Lösung existieren kann.

e) Hier reduziert sich das Gleichungssystem durch Gauß-Elimination auf eine einzige Gleichung, die erste: $4x - 2y + z = 2$. Diese kann man nun nach einer der drei Variablen auflösen, z. B.

$$4x - 2y + z = 2 \iff z = -4x + 2y + 2.$$

Dies zeigt, daß x und y beliebig gewählt werden können, während z dann gleich $-4x + 2y + 2$ sein muß, damit das Gleichungssystem erfüllt ist. Die Lösungsvektoren sind daher von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -4x + 2y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Dies stellt eine Parameterdarstellung einer *Ebene* dar: Die Lösungsmenge ist die Ebene durch den Punkt $(0 | 0 | 2)$ mit den (linear unabhängigen) Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4) a) Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 3$. In der letzten Nullzeile steht auch auf der rechten Seite 0: Das Gleichungssystem ist lösbar. Die Auflösung 'von unten nach oben' ergibt der Reihe nach

$$\begin{aligned} 3u &= 3 \iff u = 1, \\ y + z + 1 &= 3 \iff y = 2 - z, \\ x + (2 - z) + z &= 3 \iff x = 1. \end{aligned}$$

und damit die folgende Parameterdarstellung für die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - z \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R}).$$

Die Lösungsmenge ist damit eine *Gerade*, und zwar durch den Punkt $(1 | 2 | 0 | 1)$ mit *Richtungsvektor* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b),c) Hier ist der Rang jeweils $r = 4$, so daß beide Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind. Die Lösungsvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für b) und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ für c).

d) Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ -1 & -2 & 3 & -4 & -9 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 11 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & 4 & -5 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar; der Rang ist $r = 2$, die Anzahl der freien Parameter daher $n - r = 4 - 2 = 2$, die Lösungsmenge also eine *Ebene*. Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\mathbb{L}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 8/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) Zunächst die Vorüberlegungen vor Beginn der Gauß-Umformungen.

a),b),h): Es ist $n = 3$, $m = 4$ und folglich $r \leq n = 3 < m = 4$. $r < m$ bedeutet, daß am Ende der Gauß-Umformungen mindestens eine Nullzeile in der Koeffizientenmatrix auftritt. Es muß also mindestens eine Bedingung für die Lösbarkeit überprüft werden.

c),d),f),g),i): Hier ist $n = 4$, $m = 3$ und folglich $r \leq m = 3 < n = 4$. $r < n$ bedeutet, daß das System – wenn es lösbar ist (!) – unendlich viele Lösungen haben muß, da mindestens ein freier Parameter in der Darstellung der Lösungsmenge auftritt. Diese 5 Gleichungssysteme sind also auf keinen Fall eindeutig lösbar!

Dieselben Überlegungen gelten auch für e), denn auch hier ist $r < n$, da $m = 2$, $n = 3$ und $r \leq 2$ ist. Im folgenden sind die Gaußumformungen und die sich daraus ergebenden Ergebnisse aufgelistet:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 2 & -6 \\ -3 & 9 & 4 & 18 \\ 0 & 12 & 8 & 24 \\ 3 & -6 & 6 & 12 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 15 & 10 & 30 \\ 0 & 12 & 8 & 24 \\ 0 & -9 & 10 & 30 \end{array} \right) \\ & \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & 10 & 30 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 48 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist lösbar; der Rang ist $r = 3 = n$, also gibt es genau eine Lösung; diese ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & -3 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \end{array} \right) \\ & \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \\ 0 & 0 & 26 & 45 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist *unlösbar*. Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 3$.

$$\text{c)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -3 & -3 & -7 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & -10 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem ist wiederum *unlösbar*. Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 2$.

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array} \right) \\ & \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist lösbar (keine Nullzeile). Der Rang ist $r = 3$, die Dimension des Lösungsraumes daher $d = n - r = 1$: Die Lösungsmenge ist eine *Gerade*. Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\text{L : } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

$$\text{e)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -9 \end{array} \right)$$

Dieses Gleichungssystem hat den Rang $r = 2 = m$; es ist lösbar; die Dimension des Lösungsraumes ist $d = n - r = 3 - 2 = 1$, die Lösungsmenge also eine *Gerade*. Als Parameterdarstellung erhalten wir:

$$\text{L : } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ -9/5 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R}).$$

$$\text{f)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Hier bestand die Gaußumformung aus einem simplen Zeilentausch. Der Rang ist $r = 3 = m$; das System ist lösbar und die Lösungsmenge ist $d = n - r = 1$ -dimensional. Eine Parameterdarstellung für die Gerade ist

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

$$g) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -4 & 3 & 3 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & -9 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Dieses System ist unlösbar. Der Rang der Koeffizientenmatrix ist $r = 2$.

Gleiches gilt für i). h) dagegen ist lösbar; der Rang ist $r = 3$. Wegen $r = n$ ist die Lösung eindeutig:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6) Das zu lösende Gleichungssystem lautet $\begin{bmatrix} x + y & = & A \\ x & + & z = B \\ & y + z = C \end{bmatrix}$. Dieses Gleichungssystem soll für die

angegebenen Werte von A, B, C bzw. für beliebige A, B, C gelöst werden. Dazu verwendet man das Gauß'sche Eliminationsverfahren. Da die Umformungsschritte im Gauß-Verfahren *unabhängig* von der rechten Seite sind, können wir alle drei Aufgaben auf einmal erledigen, indem wir in der Matrixform *mehrere* rechte Seiten gleichzeitig behandeln:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 6 & | & 13 & | & A \\ 1 & 0 & 1 & | & 9 & | & 17 & | & B \\ 0 & 1 & 1 & | & 11 & | & 18 & | & C \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 6 & | & 13 & | & A \\ 0 & -1 & 1 & | & 3 & | & 4 & | & B - A \\ 0 & 1 & 1 & | & 11 & | & 18 & | & C \end{pmatrix} \\ \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 6 & | & 13 & | & A \\ 0 & -1 & 1 & | & 3 & | & 4 & | & B - A \\ 0 & 0 & 2 & | & 14 & | & 22 & | & C + B - A \end{pmatrix}$$

Jetzt muß man die Gleichungen für die verschiedenen rechten Seiten von unten nach oben auflösen:

$$1) \quad 2z = 14 \iff z = 7, \quad -y + 7 = 3 \iff y = 4, \quad x + 4 = 6 \iff x = 2;$$

$$2) \quad 2z = 22 \iff z = 11, \quad -y + 11 = 4 \iff y = 7, \quad x + 7 = 13 \iff x = 6.$$

Diese beiden Rechnungen sind natürlich überflüssig, wenn wir nun die Aufgabe bei *beliebiger* rechter Seite lösen. Dies ist möglich, da die Koeffizientenmatrix den Rang 3 hat! Die Auflösung ergibt:

$$2z = C + B - A \iff z = \frac{C + B - A}{2}, \\ -y + \frac{C + B - A}{2} = B - A \iff y = \frac{C}{2} + \frac{B}{2} - \frac{A}{2} + A - B = \frac{C - B + A}{2}, \\ x + \frac{C - B + A}{2} = A \iff x = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = \frac{A + B - C}{2}.$$

Setzt man die speziellen Werte aus 1) und 2) in diese Auflösungsformeln ein, so ergeben sich die oben konkret berechneten Lösungen.

c) Die Formeln des Rechenkünstlers sind leichter zu verwenden, aber mit den eben berechneten Formeln gleichwertig. Zum Beispiel

$$z = \frac{A + B + C}{2} - A = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} - A = -\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{C + B - A}{2}.$$

Genauso überprüft man die Formeln für y und z .

Für d) lautet das Gleichungssystem $\begin{bmatrix} x + y - z = P \\ x - y + z = Q \\ -x + y + z = R \end{bmatrix}$ und Gauß-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & P \\ 1 & -1 & 1 & Q \\ -1 & 1 & 1 & R \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & P \\ 0 & -2 & 2 & Q - P \\ 0 & 2 & 0 & R + P \end{array} \right).$$

Die Auflösung ist wieder möglich (Rang 3) und ergibt

$$y = \frac{P + R}{2}, \quad z = \frac{Q + R}{2}, \quad x = \frac{P + Q}{2}.$$

Die *gedachten* Zahlen x, y, z erhält man also, indem man je zwei der *genannten* Zahlen P, Q, R mittelt.

Übungen (5)

- 1) a) Lösen Sie erneut Übung (3), Aufgabe 2),b), jetzt mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.
 b) Ermitteln Sie den Ebenenschnitt von Übung (3), Aufgabe 3.
- 2) a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge \mathbb{L} des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & -9 \\ -6x - 2y - 6z & = & 18 \\ 3x + 4y - 6z & = & -9 \\ -y + 3z & = & 0 \end{array} .$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung an.

b) Begründen Sie genau, daß durch die Parameterdarstellung

$$e : \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Ebene definiert wird (lineare Unabhängigkeit nachweisen!).

- c) Untersuchen Sie die Lösungsmenge \mathbb{L} aus a) und die Ebene e aus b) auf ihre gegenseitige Lage (Parallelität, Schnittmenge).
 (Ergebnis: Nicht parallel, genau ein Schnittpunkt $(-\frac{9}{7} \mid -\frac{18}{7} \mid -\frac{6}{7})$.)
- 3) a) Lösen Sie erneut Übung (3), Aufgabe 1),b): Stellen Sie zunächst die zu untersuchenden Gleichungssysteme bzw. deren erweiterte Matrizen auf. Worin bestehen die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede? Wie kann man dies zur Verringerung des Rechenaufwandes ausnutzen? Überlegen Sie genau, welche Information Sie über die entsprechenden Gleichungssysteme wirklich brauchen. Nutzen Sie auch dies zur Minimierung des Rechenaufwandes.
 b) Untersuchen Sie nun allgemein für einen beliebigen Punkt $X = (x \mid y \mid z)$ (statt der konkret gegebenen D, E, F), welche Bedingung x, y, z erfüllen müssen, damit der Punkt X zur Ebene e gehört.
- 4) a) Welche Punkte $X = (x \mid y \mid z)$ gehören zu der Ebene e aus 2) b)? Geben Sie eine Gleichung an, die die Koordinaten von X erfüllen müssen, damit X zu e gehört.
 b) Bestimmen Sie unter Benutzung dieser Gleichung erneut den Durchschnitt von e mit \mathbb{L} aus 2) a). (Ergebnis siehe 2) c)).
- 5) Vergleichen Sie die Lösungsmengen \mathbb{L} eines beliebigen linearen Gleichungssystems (Koeffizientenmatrix A , rechte Seite b) mit der Lösungsmenge \mathbb{L}_0 des zugehörigen homogenen Gleichungssystems (gleiche Matrix A , aber rechte Seite o). Welcher geometrische Zusammenhang besteht zwischen \mathbb{L} und \mathbb{L}_0 ?
 Tip: Untersuchen Sie zunächst einen konkreten Einzelfall, etwa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -18 \end{pmatrix} .$$

Übungen (5) — Lösungen

1) b) Wir stellen zunächst die beiden Parameterdarstellungen auf:

$$e = e(A, B, C) : \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e'' = e(C, E, F) : \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r'' \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s'' \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der gemeinsamen Punkte:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r'' \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s'' \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} r + 2s + 5r'' + 4s'' = 2 \\ -r - r'' = 0 \\ -r + 2s + r'' = -2 \end{bmatrix}$$

Beachten Sie, daß die Richtungsvektoren der Ebenen (bis auf das Vorzeichen) die Spalten der Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems bilden! Gauß-Elimination ergibt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 4 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Wir erkennen, daß das Gleichungssystem in r, s, r'', s'' lösbar ist. Man erhält die Lösungen, indem man 'von unten nach oben' auflöst. Die letzte Gleichung ergibt

$$-2r'' - 4s'' = 0 \Leftrightarrow r'' = -2s'' \quad \text{mit beliebigem } s'' \in \mathbb{R}.$$

Die weitere Auflösung ist zwar möglich, braucht aber nicht durchgeführt zu werden. Denn setzt man nun $r'' = -2s''$ und s'' in die zugehörige (zweite) Parameterdarstellung ein, so erhält man die gesuchten Schnittpunkte:

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2s'' \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s'' \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s'' \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Durchschnitt der beiden Ebenen ist also eine Gerade, und zwar die durch den Punkt $C = (4 \mid 1 \mid 2)$ mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) a) Die Anwendung der Gaußelimination auf die zum Gleichungssystem gehörige erweiterte Matrix ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & -9 \\ -6 & -2 & -6 & 18 \\ 3 & 4 & -6 & -9 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Damit hat die Koeffizientenmatrix den Rang $r = 2$; das Gleichungssystem ist lösbar, da in den beiden Nullzeilen die rechten Seiten 0 sind. Damit ist das lineare Gleichungssystem reduziert auf 2 Gleichungen.

Wegen $n - r = 3 - 2 = 1$ ist die Lösungsmenge eine 1-dimensionale affine Menge, m. a. W. eine Gerade. Indem man die beiden verbliebenen Gleichungen 'von unten nach oben' auflöst, erhält man

$$y = 3z, \quad x = -3 - 2z, \quad z \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Die Lösungsvektoren sind also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 2z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die gesuchte Parameterdarstellung der Lösungsgeraden.

b) Die in der Parameterdarstellung angegebenen beiden Richtungsvektoren

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig: Wäre $v = r u$, so folgte $v_2 = r \cdot u_2 = 0$, was offensichtlich falsch ist; wäre umgekehrt $u = r \vec{v}$, so folgte $u_2 = r \cdot v_2 = r$, also $r = 0$ und dann $u = 0 v = o$, was ebenso falsch ist. Da beide Richtungsvektoren linear unabhängig sind, stellt die angegebene Parameterdarstellung eine Ebene dar.

c) Man berechnet die Schnittmenge zweier affiner Mengen, indem man die gegebenen Parameterdarstellungen ‘gleichsetzt’ (nachdem man die Parameter unterschiedlich benannt hat). Wir untersuchen also die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies stellt ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten (r, s, t) dar. Als zugehörige erweiterte Matrix und deren Gaußumformung erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \end{array} \right)$$

Hier ist der Rang $r = 3 = n = m$: Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Man erhält

$$t = -\frac{6}{7}, \quad s = -\frac{18}{7}, \quad r = \frac{5}{7}.$$

Da es genau eine Lösung gibt, gibt es genau einen Schnittpunkt: Gerade und Ebene sind nicht parallel, sie schneiden sich in genau einem Punkt.

Aber Achtung: Die gefundene Lösung stellt noch nicht den gesuchten Schnittpunkt dar, sondern nur seine Parameterwerte in den jeweiligen Parameterdarstellungen: r, s sind die Parameterwerte bzgl. der gegebenen Darstellung der Ebene e , während t den Parameter der in a) gefundenen Geraden bezeichnet. Den Lösungspunkt (bzw. seinen Ortsvektor) erhält man, indem man in eine der Parameterdarstellungen die gefundenen zugehörigen Parameterwerte einsetzt. Der Einfachheit halber setzt man $t = -6/7$ in die Geradendarstellung¹⁾ ein und erhält den Ortsvektor des Schnittpunktes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{7} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/7 \\ -18/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}$$

wie angegeben.

3) a) Eine Parameterdarstellung für die Ebene e war

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

¹⁾ Zur Berechnung des Schnittpunktes benötigt man also nur den Parameterwert für t . Man brauchte daher das obige Gleichungssystem für r, s, t nicht komplett aufzulösen!

Man muß nun die Ortsvektoren von D, E, F in dieser Parameterdarstellung für \overrightarrow{OX} einsetzen und dann jeweils untersuchen, ob es geeignete Parameterwerte r, s gibt, so daß (*) gilt. Die erweiterten Matrizen dieser Gleichungssysteme sind dann

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

Man erkennt, daß die Koeffizientenmatrix immer dieselbe ist. Ihre Spaltenvektoren sind die Richtungsvektoren der Ebene. Lediglich die rechten Seiten variieren. Untersucht man nun diese Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren, so sind die Umformungsschritte immer dieselben, da diese durch die Koeffizientenmatrix bestimmt werden. Die Rechnungen unterscheiden sich also nur in den rechten Seiten. Man kann dies ausnützen, indem man die obigen drei Matrizen zusammenfaßt zu einer mit drei rechten Seiten:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Man muß nun untersuchen, ob es geeignete Parameterwerte r, s gibt, so daß das Gleichungssystem erfüllt ist, d. h. ob das Gleichungssystem lösbar ist. (Die Lösungen selbst interessieren nicht!) Diese Frage klären wir mit dem Gauß-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Die Koeffizientenmatrix hat den Rang $r = 2$. In der einzigen Nullzeile steht auf der rechten Seite: im 1. Fall 0, das System ist lösbar: D gehört zu e , während in den beiden anderen Fällen rechts ein Wert $\neq 0$ steht, so daß das System unlösbar ist: E, F gehören nicht zu e .

b) Man kann nun die bisherigen Rechnungen noch weiter zusammenfassen, indem man das Problem für einen beliebigen Punkt $X = (x | y | z)$ untersucht. Dies bedeutet, man untersucht das Gleichungssystem (*) auf Lösbarkeit bzgl. der Unbekannten r, s ! (Vorsicht: Hier sind nicht x, y, z die Unbekannten, sondern r, s , denn es geht darum (siehe a)), ob es zu x passende Parameterwerte r, s gibt.) Stellt man zu (*) die erweiterte Matrix auf und führt Gauß-Umformungen durch, so erhält man

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x-2 \\ -1 & 0 & y-1 \\ -1 & 2 & z \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x-2 \\ 0 & 2 & x+y-3 \\ 0 & 4 & x+z-2 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x-2 \\ 0 & 2 & x+y-3 \\ 0 & 0 & \begin{cases} x+z-2 \\ -2(x+y-3) \end{cases} \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem ist also genau dann lösbar, wenn in der letzten (Null-)Zeile auf der rechten Seite auch 0 steht:

$$0 = x + z - 2 - 2(x + y - 3) = -x - 2y + z + 4 \iff x + 2y - z = 4.$$

Dies ist die gesuchte Bedingung! Genau wenn diese Gleichung $x + 2y - z = 4$ erfüllt ist, liegt $X = (x | y | z)$ in e . Mithin ist die Ebene e Lösungsmenge einer linearen Gleichung:

$$X \in e \iff x + 2y - z = 4.$$

4) a) Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen $X = (x | y | z)$ zur Ebene e mit der angegebenen Parameterdarstellung gehört. Es gilt

$$(x | y | z) \in e \iff$$

es gibt $r, s \in \mathbb{R}$ mit: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Man muß also untersuchen, ob das durch die Parametergleichung gegebene lineare Gleichungssystem mit den Unbekannten r, s lösbar ist. (Beachten Sie: Die Lösungen selbst sind nicht gefragt.) Mit

Hilfe des Gaußverfahrens entscheiden wir leicht über die Lösbarkeit. Die erweiterte Matrix für dieses Gleichungssystem (mit den Unbekannten r, s in dieser Reihenfolge) ergibt durch Gaußumformung:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x-2 \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z-1 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x-2 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & x+z-3 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x-2 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & x-2y+z-3 \end{array} \right)$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die rechte Seite in der (einzigen) Nullzeile selbst auch 0 ist: $x - 2y + z - 3 = 0$. Also:

$$(x \mid y \mid z) \in e \iff x - 2y + z = 3.$$

Damit besteht e gerade aus den Punkten X , deren Koordinaten diese eine (lineare) Gleichung erfüllen: e ist als Lösungsmenge einer linearen Gleichung dargestellt.

b) Wie eben festgestellt, ist die Ebene e Lösungsmenge der Gleichung $x - 2y + z = 3$, während L definitionsgemäß Lösungsmenge des Gleichungssystems aus 2), a) ist. Der *Durchschnitt* beider Mengen besteht aus den Punkten, die *beide* Gleichungssysteme erfüllen. Um also den Durchschnitt zu berechnen, muß man beide Gleichungssysteme zu *einem* Gleichungssystem zusammenfügen und dieses dann lösen. Dies ergibt zunächst die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & -9 \\ -6 & -2 & -6 & 18 \\ 3 & 4 & -6 & -9 \\ \hline 0 & -1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

und mit den Gaußumformungen aus Aufgabe 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & -9 \\ -6 & -2 & -6 & 18 \\ 3 & 4 & -6 & -9 \\ \hline 0 & -1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Man kann nun die beiden kompletten Nullzeilen weglassen und braucht nur noch die neu hinzugekommene letzte Zeile umzuformen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 18 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & 18 \end{array} \right)$$

Dies ergibt $-21z = 18 \iff z = -6/7$ und dann weiter $y = -18/7$ sowie $x = -9/7$. Dies sind die Koordinaten des (einzigen) Schnittpunkts.

- 5) Wir untersuchen zunächst einmal den vorgeschlagenen konkreten Einzelfall. Die Gaußelimination ergibt für das inhomogene System

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -8 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \\ -3 & 3 & -12 & -18 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -8 & 2 \\ 0 & -6 & 18 & 6 \\ 0 & 12 & -36 & -12 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

und für das homogene System

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -12 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -6 & 18 & 0 \\ 0 & 12 & -36 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Da die Koeffizientenmatrix in beiden Fällen dieselbe ist, kann man bei der Gaußelimination auch jeweils dieselben Umformungen durchführen, und erhält so am Ende erweiterte Matrizen, die sich nur in der rechten Seite unterscheiden. (Dabei bleibt im homogenen Fall die rechte Seite unverändert gleich 0. Die Rechnungen im homogenen Fall brachten also nichts Neues und waren völlig entbehrlich!) So ist der Rang r in beiden Fällen derselbe, hier $r = 2$. Während jedoch das *homogene* System in

jedem Falle lösbar ist, kann das inhomogene (bei $r = 2 < m = 3$) unlösbar sein. Im vorliegenden Falle ist aber auch das inhomogene lösbar.

Vergleichen wir nun die weitere Auflösung der beiden Systeme.

Homogener Fall:

$$\begin{aligned} y - 3z &= 0 &\iff y &= 3z \\ x + 3 \cdot 3z - 8z &= 0 &\iff x &= -z \end{aligned}$$

also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inhomogener Fall:

$$\begin{aligned} y - 3z &= -1 &\iff y &= 3z - 1 \\ x + 3 \cdot (3z - 1) - 8z &= 2 &\iff x &= -z + 5 \end{aligned}$$

also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z + 2 \\ 3z - 1 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sie erkennen, daß sich in beiden Fällen die Parameterdarstellung einer Geraden ergibt, wobei die Richtungsvektoren übereinstimmen: Die beiden Geraden sind parallel.

Die obigen Rechnungen zeigen auch, warum dies der Fall ist und daß dies allgemein gilt. Bei der Auflösung der durch Gaußelimination erzeugten Dreiecksmatrix erhält man in beiden Fällen exakt dieselben Faktoren bei den Unbekannten. Durch diese werden aber schließlich die Richtungsvektoren bestimmt. Lediglich die Terme, die keine Unbekannten enthalten, unterscheiden sich, und diese legen den ‘Ausgangspunkt’ fest. Es gilt also allgemein: L und L_0 können mit denselben Richtungsvektoren beschrieben werden; L und L_0 sind parallel. Beachten Sie jedoch, daß dies nur Sinn macht, wenn das inhomogene System lösbar ist, d. h. $L \neq \emptyset$ ist.

Übungen (6)

- 1) Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC .
- Bestimmen Sie allgemein den Schnittpunkt zweier Seitenhalbierender.
[Ergebnis: Der Schnittpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1, wobei die längere Seite beim Eckpunkt liegt.]
 - Folgern Sie, daß sich in einem beliebigen Dreieck alle *drei* Seitenhalbierenden in demselben Punkt schneiden. Dies ist der sog. *Schwerpunkt* S des Dreiecks.
 - Zeigen Sie, daß für den Schwerpunkt S (und jeden beliebigen Punkt O) die folgende Berechnungsformel gilt

$$\vec{OS} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

- 2) Zeigen Sie, daß sich die Diagonalen eines beliebigen Parallelogramms gegenseitig halbieren.
- 3) Ein *Trapez* ist ein ebenes Viereck mit *einem* Paar paralleler Seiten. Sei $ABCD$ ein solches Trapez, wobei $\vec{DC} = k \cdot \vec{AB}$ sei. (Welche geometrische Bedeutung hat k ?)
- In welchem Verhältnis teilt der Diagonalschnittpunkt die beiden Diagonalen?
 - Überprüfen Sie Ihr Ergebnis am Spezialfall $k = 1$. (Was bedeutet dieser geometrisch?)
- 4) Gegeben sei ein beliebiges Tetraeder $ABCD$. Unter einer *Schwerelinie* eines Tetraeders versteht man eine Gerade durch eine Ecke und den Schwerpunkt des gegenüberliegenden Dreiecks.
- Bestimmen Sie allgemein den Schnittpunkt zweier Schwerelinien.
[Ergebnis: Der Schnittpunkt zweier Schwerelinien teilt diese im Verhältnis 3 : 1.]
 - Folgern Sie, daß sich alle vier Schwerelinien in einem einzigen Punkt schneiden, dem sog. *Schwerpunkt* S des Tetraeders.
 - Zeigen Sie, daß für diesen Schwerpunkt S (und jeden beliebigen Punkt O) gilt:

$$\vec{OS} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}).$$

- 5) Gegeben ist ein beliebiges Tetraeder $ABCD$.
- Verbindet man die Mittelpunkte einander *gegenüberliegender* (d. h. sich nicht schneidender) Kanten (also M_{AB} mit M_{CD} , M_{AC} mit M_{BD} und M_{AD} mit M_{BC}), so schneiden sich diese Geraden in einem einzigen Punkt. Welcher ist es?
 - Zeigen Sie, daß die *benachbarten* Kantenmittelpunkte M_{AB} , M_{BC} , M_{CD} , M_{DA} ein Parallelogramm bilden und daher in einer Ebene liegen. Für welche anderen 4 benachbarten Kantenmittelpunkte gilt dies ebenso?

Übungen (6) — Lösungen

1) Da ABC ein Dreieck ist, sind die drei Punkte nicht *kollinear* (d. h. sie liegen nicht alle auf einer Geraden). Dies bedeutet, daß die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ linear unabhängig sind. Wir wählen als affines Koordinatensystem der Ebene, in der ABC (und alle gesuchten Punkte) liegen, den *Ausgangspunkt* A und die linear unabhängigen *Richtungsvektoren* \vec{u}, \vec{v} .

a) Wir untersuchen die Seitenhalbierenden $g(A, M_{BC})$ und $g(B, M_{AC})$. Dazu stellen wir zunächst Parameterdarstellungen dafür auf (mit $O = A$):

$$\begin{aligned} g(A, M_{BC}) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AM_{BC}} & (r \in \mathbb{R}) . \\ g(B, M_{AC}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BM_{AC}} & (s \in \mathbb{R}) . \end{aligned}$$

Als nächsten Schritt stelle man in diesen Parameterdarstellungen die rechten Seiten als *Linearkombinationen* der zugrundegelegten linear unabhängigen Vektoren \vec{u}, \vec{v} dar. Dabei orientiere man sich an einer kleinen Skizze.

$$\begin{aligned} g(A, M_{BC}) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \overrightarrow{AM_{BC}} = r(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) \\ &= r(\vec{u} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})) = r(\vec{u} + \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v})) \\ &= \frac{r}{2} \cdot \vec{u} + \frac{r}{2} \cdot \vec{v} . \\ g(B, M_{AC}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BM_{AC}} = \vec{u} + s(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}) \\ &= \vec{u} + s(-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) = (1-s) \cdot \vec{u} + \frac{s}{2} \cdot \vec{v} . \end{aligned}$$

Nun kann man den Schnittpunkt bestimmen, indem man wie üblich die Parameterdarstellungen der beiden Geraden ‘gleichsetzt’:

$$g(A, M_{BC}) \cap g(B, M_{AC}) : \quad \frac{r}{2} \cdot \vec{u} + \frac{r}{2} \cdot \vec{v} = (1-s) \cdot \vec{u} + \frac{s}{2} \cdot \vec{v} .$$

Da \vec{u}, \vec{v} linear unabhängig sind, kann man in dieser Vektorgleichung nun *Koeffizientenvergleich* durchführen und erhält das folgende lineare Gleichungssystem für r, s :

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} = 1-s \\ \frac{r}{2} = \frac{s}{2} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} r = s \\ \frac{r}{2} = 1-r \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} r = s \\ r = \frac{2}{3} \end{bmatrix} \iff r = s = \frac{2}{3} .$$

Dies bedeutet, daß sich die beiden Seitenhalbierenden in einem Punkt S schneiden, und daß dieser beide Seitenhalbierende im Verhältnis $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$ teilt. Der größere Abschnitt liegt dabei auf Seiten der jeweiligen Ecke.

b) Da die Überlegungen von a) für *jedes* beliebige Dreieck und je zwei ebenfalls beliebige Seitenhalbierende darin gelten, muß auch die dritte Seitenhalbierende die anderen im genannten Verhältnis teilen, also in demselben Punkt S schneiden: Alle *drei* Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt.

c) Den Schnittpunkt S erhält man, indem man einen der gefundenen Parameterwerte in die zugehörige Parameterdarstellung einsetzt:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2/3}{2} \cdot \vec{u} + \frac{2/3}{2} \cdot \vec{v} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) .$$

Dies formt man wie folgt zum gewünschten Ergebnis um:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AS} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ \iff \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3 \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ \iff \overrightarrow{OS} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) . \end{aligned}$$

- 2) Sei $ABCD$ das Parallelogramm. Das bedeutet, daß die vier Punkte nicht auf einer Geraden liegen und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ist. Wir wählen als affines Koordinatensystem den Punkt A und die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Diese Vektoren sind linear unabhängig, denn andernfalls lägen die Punkte A, B, D auf einer Geraden. Wegen $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ läge dann auch C auf dieser Geraden, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir stellen zunächst Parameterdarstellungen für die beiden Diagonalen auf:

$$\begin{aligned} g(A, C) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AC} & (r \in \mathbf{R}), \\ g(B, D) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} & (s \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Wir stellen die rechten Seiten als Linearkombinationen von \vec{u} , \vec{v} dar:

$$\begin{aligned} g(A, C) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AC} = r \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = r \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v}, \\ g(B, D) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{u} + s \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \vec{u} + s \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = (1-s) \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Schnittpunkts beider Diagonalen lösen wir die durch Vergleich beider Parameterdarstellungen entstehende Vektorgleichung mittels Koeffizientenvergleich (\vec{u} , \vec{v} sind linear unabhängig!):

$$\begin{aligned} r \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v} &= (1-s) \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \iff \begin{bmatrix} r &= & 1-s \\ r &= & s \end{bmatrix} \\ \iff \begin{bmatrix} r &= & s \\ r &= & 1-r \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} r &= & s \\ 2r &= & 1 \end{bmatrix} \iff r = s = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß sich beide Diagonalen schneiden, und zwar im (gemeinsamen) Mittelpunkt beider Diagonalen.

- 3) Die Gleichung $\overrightarrow{DC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ zeigt zunächst an, daß das Paar paralleler Seiten durch die Vektoren \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{DC} gegeben ist. k gibt dabei das Längenverhältnis von \overrightarrow{DC} zu \overrightarrow{AB} an.
a) Wir wählen als affines Koordinatensystem den Punkt A mit den linear unabhängigen Richtungsvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Als Parameterdarstellungen der beiden Diagonalen erhalten wir

$$\begin{aligned} g(A, C) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AC} & (r \in \mathbf{R}), \\ g(B, D) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} & (s \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Wir stellen die rechten Seiten als Linearkombinationen von \vec{u} , \vec{v} dar:

$$\begin{aligned} g(A, C) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AC} = r \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= r(\vec{v} + k \cdot \vec{u}) = kr \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v}, \\ g(B, D) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{u} + s \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \vec{u} + s \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = (1-s) \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Schnittpunkts beider Diagonalen lösen wir die durch Vergleich beider Parameterdarstellungen entstehende Vektorgleichung mittels Koeffizientenvergleich (\vec{u} , \vec{v} sind linear unabhängig!):

$$\begin{aligned} kr \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v} &= (1-s) \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \iff \begin{bmatrix} kr &= & 1-s \\ r &= & s \end{bmatrix} \\ \iff \begin{bmatrix} kr &= & 1-r \\ r &= & s \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} (k+1)r &= & 1 \\ r &= & s \end{bmatrix} \iff r = s = \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Die Diagonalen schneiden sich also in einem Punkt, der beide Diagonalen in demselben Verhältnis teilt, nämlich im Verhältnis $\frac{1}{k+1} : \frac{k}{k+1} = 1 : k$. Dies ist dasselbe Verhältnis wie das der parallelen Trapezseiten zueinander!

- In einem Trapez teilt der Diagonalschnittpunkt die Diagonalen in dem Verhältnis, in dem auch die angrenzenden parallelen Seiten zueinander stehen.

- b) Im Spezialfall $k = 1$ ist das Trapez ein Parallelogramm und die Diagonalen teilen sich im Verhältnis $1 : k = 1 : 1$, d. h. sie halbieren sich.
- 4) Die vier Punkte $ABCD$ bilden ein Tetraeder, d. h. sie liegen nicht in einer Ebene. Also sind die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ linear unabhängig. Wir wählen als affines Koordinatensystem für diese (räumliche) Problemstellung den Punkt A mit diesen drei Vektoren.
- a) Es bezeichne allgemein S_{ABC} den Schwerpunkt eines Dreiecks ABC . Dann können wir nun zunächst die Parameterdarstellungen zweier Schwerlinien des Tetraeders aufstellen:

$$\begin{aligned} g(A, S_{BCD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AS_{BCD}} & (r \in \mathbb{R}), \\ g(B, S_{ACD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BS_{ACD}} & (s \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Um nun die rechten Seiten als Linearkombinationen der drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ darzustellen, müssen wir die Richtungsvektoren der Geraden $\overrightarrow{AS_{BCD}}$ und $\overrightarrow{BS_{ACD}}$ so darstellen. Wir benutzen dazu das Ergebnis aus Aufgabe 1). Dieses beschreibt den Verbindungsvektor von einem beliebigen Punkt (dort O genannt) zum Schwerpunkt eines beliebigen Dreiecks (dort ABC) als *arithmetisches Mittel* der Verbindungsvektoren von demselben Punkt zu den drei Eckpunkten. Angewendet auf $\overrightarrow{AS_{BCD}}$ ergibt sich (A als Ausgangspunkt, BCD als Dreieck):

$$\overrightarrow{AS_{BCD}} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}),$$

und entsprechend

$$\overrightarrow{BS_{ACD}} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}).$$

Nun können wir die Parameterdarstellungen mittels der Vektoren des affinen Koordinatensystems ausdrücken:

$$\begin{aligned} g(A, S_{BCD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AS_{BCD}} = r \cdot \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{r}{3} \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \frac{r}{3} \cdot \vec{u} + \frac{r}{3} \cdot \vec{v} + \frac{r}{3} \cdot \vec{w}, \\ g(B, S_{ACD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BS_{ACD}} = \vec{u} + s \cdot \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \vec{u} + \frac{s}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})) \\ &= \vec{u} + \frac{s}{3} \cdot (-3\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = (1-s) \cdot \vec{u} + \frac{s}{3} \cdot \vec{v} + \frac{s}{3} \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir unmittelbar $r = s$ und

$$\frac{r}{3} = 1 - s = 1 - r \iff \frac{4}{3} \cdot r = 1 \iff r = \frac{3}{4}.$$

Aus $r = s = \frac{3}{4}$ entnehmen wir, daß sich die beiden Schwerlinien in einem Punkt schneiden, und daß dieser *beide* Schwerlinien in demselben Verhältnis $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3 : 1$ teilt. Dabei liegt der längere Abschnitt auf Seiten der Ecke des Tetraeders.

b) Da das Ergebnis von a) unabhängig vom Tetraeder und den Schwerlinien immer dasselbe ist, müssen auch die anderen Schwerlinien die erste in dem genannten Verhältnis teilen, also in *demselben* Punkt S schneiden.

c) Gemäß a) gilt für den Schwerpunkt S des Tetraeders

$$\overrightarrow{AS} = \frac{3/4}{3} \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

Wie in Aufgabe 1) kann man dies äquivalent umformen (man addiere auf beiden Seiten den Vektor \overrightarrow{OA}) zu

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

- Der Verbindungsvektor von einem beliebigen Punkt O zum Schwerpunkt eines Tetraeders ist das arithmetische Mittel der Verbindungsvektoren von diesem Punkt zu den 4 Eckpunkten des Tetraeders.

- 5) Wir wählen als affines Koordinatensystem wieder den Punkt A sowie die drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
 a) Wir berechnen den Schnittpunkt zweier dieser Verbindungsgeraden einander gegenüberliegender Kantenmittelpunkte.

$$\begin{aligned} g(M_{AB}, M_{CD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AM_{AB}} + r \cdot \overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} \quad (r \in \mathbb{R}), \\ g(M_{AC}, M_{BD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AM_{AC}} + s \cdot \overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} \quad (s \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst die beiden Verbindungsvektoren der Mittelpunkte als Linearkombinationen von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Wir benutzen dabei die Formel zur Berechnung von Mittelpunkten

$$\overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

die für beliebige Punkte O, A, B gilt. (Siehe Übungen (2), Aufgabe 1. Beachten Sie die Analogie mit der Berechnungsformel für die Schwerpunkte von Dreieck und Tetraeder! Der Mittelpunkt zwischen zwei Punkten ist im Grunde nichts anderes als der Schwerpunkt der Verbindungsstrecke.)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} &= \overrightarrow{M_{AB}A} + \overrightarrow{AM_{CD}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}. \\ \overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} &= \overrightarrow{M_{AC}A} + \overrightarrow{AM_{BD}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}. \end{aligned}$$

Damit lauten die Parameterdarstellungen der beiden Verbindungsgeraden

$$\begin{aligned} g(M_{AB}, M_{CD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AM_{AB}} + r \cdot \overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \vec{u} + r \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \vec{u} + \frac{1}{2} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \cdot \vec{w}\right) \\ &= \frac{1-r}{2} \cdot \vec{u} + \frac{r}{2} \cdot \vec{v} + \frac{r}{2} \cdot \vec{w} \\ g(M_{AC}, M_{BD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AM_{AC}} + s \cdot \overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \vec{v} + s \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{u} - \frac{1}{2} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \cdot \vec{w}\right) \\ &= \frac{s}{2} \cdot \vec{u} + \frac{1-s}{2} \cdot \vec{v} + \frac{s}{2} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

Wir berechnen nun den Schnittpunkt dieser beiden Geraden:

$$\begin{aligned} \frac{1-r}{2} \cdot \vec{u} + \frac{r}{2} \cdot \vec{v} + \frac{r}{2} \cdot \vec{w} &= \frac{s}{2} \cdot \vec{u} + \frac{1-s}{2} \cdot \vec{v} + \frac{s}{2} \cdot \vec{w} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-r & = & s \\ r & = & 1-s \\ r & = & s \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-r & = & r \\ r & = & s \end{bmatrix} \Leftrightarrow r = s = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Da diese Werte unabhängig vom Tetraeder und den gewählten gegenüberliegenden Kantenmittelpunkten ist, folgt wieder, daß auch die dritte Verbindungsgerade durch denselben Schnittpunkt S verlaufen muß. Für den Schnittpunkt erhält man aus $r = 1/2$:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1/2}{2} \cdot \vec{u} + \frac{1/2}{2} \cdot \vec{v} + \frac{1/2}{2} \cdot \vec{w} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

Der Vergleich mit der vorangehenden Aufgabe zeigt, daß S der Schwerpunkt des Tetraeders ist.

b) Es ist

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AB}B} + \overrightarrow{BM_{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Genauso berechnet man $\overrightarrow{M_{DA}M_{CD}} = \overrightarrow{M_{AD}M_{DC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ und stellt die Übereinstimmung fest: $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ ist ein Parallelogramm. Dabei sind die Mittelpunkte der Reihe nach entsprechend der Reihenfolge $ABCD$ gebildet. Die bisherigen Überlegungen gelten für *jede* Reihenfolge der 4 Punkte: $ABDC$, $ACBD$. (Es gibt noch drei weitere Anordnungen der 4 Punkte $ACDB$, $ADBC$ und $ADCB$, die aber zu keinem neuen Parallelogramm führen.)

Die in a) betrachteten Verbindungsgeraden *gegenüberliegender* Kantenmitten sind gerade die Diagonalen dieser Parallelogramme, die sich bekanntlich gegenseitig halbieren (daher in a) $r = s = 1/2$). Nach a) ist der Tetraederschwerpunkt der Diagonalschnittpunkte aller drei Parallelogramme.

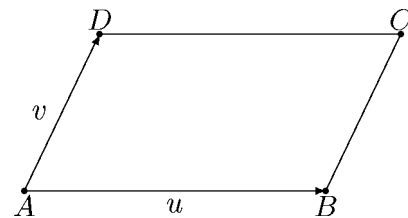
Übungen (6)

- 1) Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC , d. h. drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.
- Bestimmen Sie allgemein den Schnittpunkt zweier Seitenhalbender.
[Ergebnis: Der Schnittpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$, wobei die längere Seite beim Eckpunkt liegt.]
 - Folgern Sie, daß sich in einem beliebigen Dreieck alle *drei* Seitenhalbierenden in demselben Punkt schneiden. Dies ist der sog. *Schwerpunkt* S des Dreiecks.
 - Zeigen Sie, daß für den Schwerpunkt S (und jeden beliebigen Punkt O) die folgende Berechnungsformel gilt

$$\vec{OS} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

- 2) Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck mit zwei Paaren paralleler Seiten. Zeigen Sie:

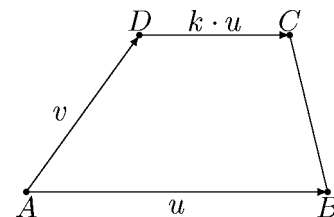
a) In einem Parallelogramm $ABCD$ (mit der üblichen Bezeichnung der Eckpunkte entgegen dem Uhrzeiger, siehe Skizze) gilt $\vec{AB} = \vec{DC}$ und $\vec{AD} = \vec{BC}$. [Geometrisch bedeutet dies, daß die einander gegenüberliegenden Seiten nicht nur parallel, sondern auch gleich lang sein müssen.]



b) Bereits aus der Gültigkeit einer Vektorgleichung $\vec{AB} = \vec{DC}$ folgt, daß die 4 Punkte $ABCD$ ein Parallelogramm bilden.

c) In einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig.

- 3) Ein *Trapez* ist ein ebenes Viereck mit *einem* Paar paralleler Seiten. Sei $ABCD$ ein solches Trapez, wobei $\vec{DC} = k \cdot \vec{AB}$ sei. (Welche geometrische Bedeutung hat k ?)



a) In welchem Verhältnis teilt der Diagonalschnittpunkt die beiden Diagonalen?

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis am Spezialfall $k = 1$. (Was bedeutet dieser geometrisch?)

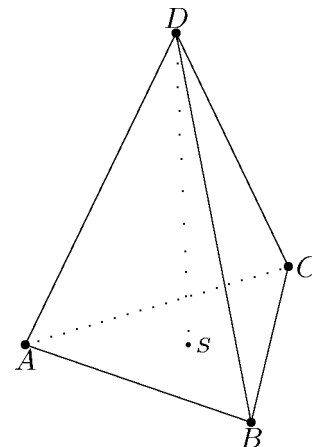
- 4) Gegeben sei ein beliebiges Tetraeder $ABCD$, d. h. 4 Punkte, die nicht in einer Ebene liegen (siehe Skizze). Unter einer *Schwerelinie* eines Tetraeders versteht man eine Gerade durch eine Ecke und den Schwerpunkt des gegenüberliegenden Dreiecks.

a) Bestimmen Sie allgemein den Schnittpunkt zweier Schwerelinien.
[Ergebnis: Der Schnittpunkt zweier Schwerelinien teilt diese im Verhältnis $3 : 1$.]

b) Folgern Sie, daß sich alle vier Schwerelinien in einem einzigen Punkt schneiden, dem sog. *Schwerpunkt* S des Tetraeders.

c) Zeigen Sie, daß für diesen Schwerpunkt S (und jeden beliebigen Punkt O) gilt:

$$\vec{OS} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}).$$



- 5) Gegeben ist ein beliebiges Tetraeder $ABCD$.

a) Verbindet man die Mittelpunkte einander *gegenüberliegender* (d. h. sich nicht schneidender) Kanten (also M_{AB} mit M_{CD} , M_{AC} mit M_{BD} und M_{AD} mit M_{BC}), so schneiden sich diese Geraden in einem einzigen Punkt. Welcher ist es?

b) Zeigen Sie, daß die *benachbarten* Kantenmittelpunkte M_{AB} , M_{BC} , M_{CD} , M_{DA} ein Parallelogramm bilden und daher in einer Ebene liegen. Für welche anderen 4 benachbarten Kantenmittelpunkte gilt dies ebenso?

Übungen (6) — Lösungen

- 1) Siehe Skript, S. 14f.
 2) Da die Punkte $ABCD$ ein Viereck bilden, liegen keine drei Punkte auf einer Geraden. Also sind die Vektoren $u = \overrightarrow{AB}$ und $v = \overrightarrow{AD}$ linear unabhängig.
 a) Da ein Parallelogramm vorliegt, sind die Geraden $g(A, B)$ und $g(D, C)$ parallel, ihre Richtungsvektoren also Vielfache voneinander: $\overrightarrow{DC} = r \cdot \overrightarrow{AB} = ru$ mit einem $r \in \mathbb{R}$. Genauso folgt $\overrightarrow{BC} = s \overrightarrow{AD} = sv$ mit einem $s \in \mathbb{R}$. Daraus ergibt sich für den Diagonalvektor

$$\overrightarrow{AC} = v + ru = u + sv.$$

Da u, v linear unabhängig sind, kann man an dieser Vektorgleichung Koeffizientenvergleich durchführen und erhält $r = 1$ (Koeffizienten von u) und $1 = s$ (Koeffizienten von v). Insgesamt also $r = s = 1$ und mithin $\overrightarrow{DC} = u = \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC} = v = \overrightarrow{AD}$.

b) Aus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ folgt natürlich $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ und daher

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}.$$

Damit sind beide Vektorgleichungen erfüllt, insbesondere also die einander gegenüberliegenden Seiten parallel. Mithin ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

c) Als affines Koordinatensystem benutzen wir den Punkt A mit den linear unabhängigen Vektoren u, v . Wir stellen zunächst Parameterdarstellungen für die beiden Diagonalen auf:

$$\begin{aligned} g(A, C) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AC} & (r \in \mathbb{R}), \\ g(B, D) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} & (s \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Wir stellen die rechten Seiten als Linearkombinationen von u, v dar:

$$\begin{aligned} g(A, C) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AC} = r \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = r \cdot u + r \cdot v, \\ g(B, D) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} = u + s \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= u + s \cdot (-u + v) = (1 - s) \cdot u + s \cdot v. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Schnittpunkts beider Diagonalen lösen wir die durch Vergleich beider Parameterdarstellungen entstehende Vektorgleichung mittels Koeffizientenvergleich (u, v sind linear unabhängig!):

$$\begin{aligned} r \cdot u + r \cdot v &= (1 - s) \cdot u + s \cdot v \iff \begin{bmatrix} r &= & 1 - s \\ r &= & s \end{bmatrix} \\ \iff \begin{bmatrix} r &= & s \\ r &= & 1 - r \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} r &= & s \\ 2r &= & 1 \end{bmatrix} \iff r = s = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß sich beide Diagonalen schneiden, und zwar im (gemeinsamen) Mittelpunkt beider Diagonalen.

- 3) Die Gleichung $\overrightarrow{DC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ zeigt zunächst an, daß das Paar paralleler Seiten durch die Vektoren \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{DC} gegeben ist. k gibt dabei das Längenverhältnis von \overrightarrow{DC} zu \overrightarrow{AB} an.
 a) Wir wählen als affines Koordinatensystem den Punkt A mit den linear unabhängigen Richtungsvektoren $u = \overrightarrow{AB}$ und $v = \overrightarrow{AD}$. Als Parameterdarstellungen der beiden Diagonalen erhalten wir

$$\begin{aligned} g(A, C) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AC} & (r \in \mathbb{R}), \\ g(B, D) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} & (s \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Wir stellen die rechten Seiten als Linearkombinationen von u, v dar:

$$\begin{aligned} g(A, C) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AC} = r \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= r(v + k \cdot u) = kr \cdot u + r \cdot v, \\ g(B, D) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BD} = u + s \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= u + s \cdot (-u + v) = (1 - s) \cdot u + s \cdot v. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Schnittpunkts beider Diagonalen lösen wir die durch Vergleich beider Parameterdarstellungen entstehende Vektorgleichung mittels Koeffizientenvergleich (u, v sind linear unabhängig!):

$$\begin{aligned} kr \cdot u + r \cdot v = (1-s) \cdot u + s \cdot v &\iff \begin{bmatrix} kr & = & 1-s \\ r & = & s \end{bmatrix} \\ \iff \begin{bmatrix} kr & = & 1-r \\ r & = & s \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} (k+1)r & = & 1 \\ r & = & s \end{bmatrix} \iff r = s = \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Die Diagonalen schneiden sich also in einem Punkt, der beide Diagonalen in demselben Verhältnis teilt, nämlich im Verhältnis $\frac{1}{k+1} : \frac{k}{k+1} = 1 : k$. Dies ist dasselbe Verhältnis wie das der parallelen Trapezseiten zueinander!

- In einem Trapez teilt der Diagonalschnittpunkt die Diagonalen in dem Verhältnis, in dem auch die angrenzenden parallelen Seiten zueinander stehen.

b) Im Spezialfall $k = 1$ ist das Trapez ein Parallelogramm und die Diagonalen teilen sich im Verhältnis $1 : k = 1 : 1$, d. h. sie halbieren sich.

4) Da die vier Punkte $ABCD$ ein Tetraeder bilden, liegen sie nicht in einer Ebene, also sind die Vektoren $u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC}, w = \overrightarrow{AD}$ linear unabhängig. Wir wählen als affines Koordinatensystem für diese (räumliche) Problemstellung den Punkt A mit diesen drei Vektoren.

a) Es bezeichne allgemein S_{ABC} den Schwerpunkt eines Dreiecks ABC . Dann können wir nun zunächst die Parameterdarstellungen zweier Schwerlinien des Tetraeders aufstellen:

$$\begin{aligned} g(A, S_{BCD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AS_{BCD}} & (r \in \mathbf{R}), \\ g(B, S_{ACD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BS_{ACD}} & (s \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Um nun die rechten Seiten als Linearkombinationen der drei Vektoren u, v, w darzustellen, müssen wir die Richtungsvektoren der Geraden $\overrightarrow{AS_{BCD}}$ und $\overrightarrow{BS_{ACD}}$ so darstellen. Wir benutzen dazu das Ergebnis aus Aufgabe 1). Dieses beschreibt den Verbindungsvektor von einem beliebigen Punkt (dort O genannt) zum Schwerpunkt eines beliebigen Dreiecks (dort ABC) als arithmetisches Mittel der Verbindungsvektoren von demselben Punkt zu den drei Eckpunkten. Angewendet auf $\overrightarrow{AS_{BCD}}$ ergibt sich (A als Ausgangspunkt, BCD als Dreieck):

$$\overrightarrow{AS_{BCD}} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}),$$

und entsprechend

$$\overrightarrow{BS_{ACD}} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}).$$

Nun können wir die Parameterdarstellungen mittels der Vektoren des affinen Koordinatensystems ausdrücken:

$$\begin{aligned} g(A, S_{BCD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= r \cdot \overrightarrow{AS_{BCD}} = r \cdot \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{r}{3} \cdot (u + v + w) = \frac{r}{3} \cdot u + \frac{r}{3} \cdot v + \frac{r}{3} \cdot w, \\ g(B, S_{ACD}) : \quad \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BS_{ACD}} = u + s \cdot \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= u + \frac{s}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})) \\ &= u + \frac{s}{3} \cdot (-3u + v + w) = (1-s) \cdot u + \frac{s}{3} \cdot v + \frac{s}{3} \cdot w. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir unmittelbar $r = s$ und

$$\frac{r}{3} = 1 - s = 1 - r \iff \frac{4}{3} \cdot r = 1 \iff r = \frac{3}{4}.$$

Aus $r = s = \frac{3}{4}$ entnehmen wir, daß sich die beiden Schwerlinien in einem Punkt schneiden, und daß dieser beide Schwerlinien in demselben Verhältnis $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3 : 1$ teilt. Dabei liegt der längere Abschnitt auf Seiten der Ecke des Tetraeders.

b) Da das Ergebnis von a) unabhängig vom Tetraeder und den Schwerelinien immer dasselbe ist, müssen auch die anderen Schwerelinien die erste in dem genannten Verhältnis teilen, also in *demselben* Punkt S schneiden.

c) Gemäß a) gilt für den Schwerpunkt S des Tetraeders

$$\overrightarrow{AS} = \frac{3/4}{3} \cdot (u + v + w) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

Wie in Aufgabe 1) kann man dies äquivalent umformen (man addiere auf beiden Seiten den Vektor \overrightarrow{OA}) zu

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

- *Der Verbindungsvektor von einem beliebigen Punkt O zum Schwerpunkt eines Tetraeders ist das arithmetische Mittel der Verbindungsvektoren von diesem Punkt zu den 4 Eckpunkten des Tetraeders.*

5) Wir wählen als affines Koordinatensystem wieder den Punkt A sowie die drei linear unabhängigen Vektoren $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$, $w = \overrightarrow{AD}$.

a) Wir berechnen den Schnittpunkt zweier dieser Verbindungsgeraden einander gegenüberliegender Kantenmittelpunkte.

$$g(M_{AB}, M_{CD}) : \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AM_{AB}} + r \cdot \overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} \quad (r \in \mathbb{R}),$$

$$g(M_{AC}, M_{BD}) : \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AM_{AC}} + s \cdot \overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Wir berechnen zunächst die beiden Verbindungsvektoren der Mittelpunkte als Linearkombinationen von u, v, w . Wir benutzen dabei die Formel zur Berechnung von Mittelpunkten

$$\overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

die für beliebige Punkte O, A, B gilt. (Siehe Übungen (2), Aufgabe 1. Beachten Sie die Analogie mit der Berechnungsformel für die Schwerpunkte von Dreieck und Tetraeder! Der Mittelpunkt zwischen zwei Punkten ist im Grunde nichts anderes als der Schwerpunkt der Verbindungsstrecke.)

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} = \overrightarrow{M_{AB}A} + \overrightarrow{AM_{CD}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w.$$

$$\overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} = \overrightarrow{M_{AC}A} + \overrightarrow{AM_{BD}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w.$$

Damit lauten die Parameterdarstellungen der beiden Verbindungsgeraden

$$\begin{aligned} g(M_{AB}, M_{CD}) : \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AM_{AB}} + r \cdot \overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot u + r \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot u + \frac{1}{2} \cdot v + \frac{1}{2} \cdot w\right) \\ &= \frac{1-r}{2} \cdot u + \frac{r}{2} \cdot v + \frac{r}{2} \cdot w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(M_{AC}, M_{BD}) : \overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AM_{AC}} + s \cdot \overrightarrow{M_{AC}M_{BD}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot v + s \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot u - \frac{1}{2} \cdot v + \frac{1}{2} \cdot w\right) \\ &= \frac{s}{2} \cdot u + \frac{1-s}{2} \cdot v + \frac{s}{2} \cdot w \end{aligned}$$

Wir berechnen nun den Schnittpunkt dieser beiden Geraden:

$$\begin{aligned} \frac{1-r}{2} \cdot u + \frac{r}{2} \cdot v + \frac{r}{2} \cdot w &= \frac{s}{2} \cdot u + \frac{1-s}{2} \cdot v + \frac{s}{2} \cdot w \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-r & = & s \\ r & = & 1-s \\ r & = & s \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-r & = & r \\ r & = & s \end{bmatrix} \Leftrightarrow r = s = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Da diese Werte unabhängig vom Tetraeder und den gewählten gegenüberliegenden Kantenmittelpunkten ist, folgt wieder, daß auch die dritte Verbindungsgerade durch denselben Schnittpunkt S verlaufen muß. Für den Schnittpunkt erhält man aus $r = 1/2$:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1/2}{2} \cdot u + \frac{1/2}{2} \cdot v + \frac{1/2}{2} \cdot w = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

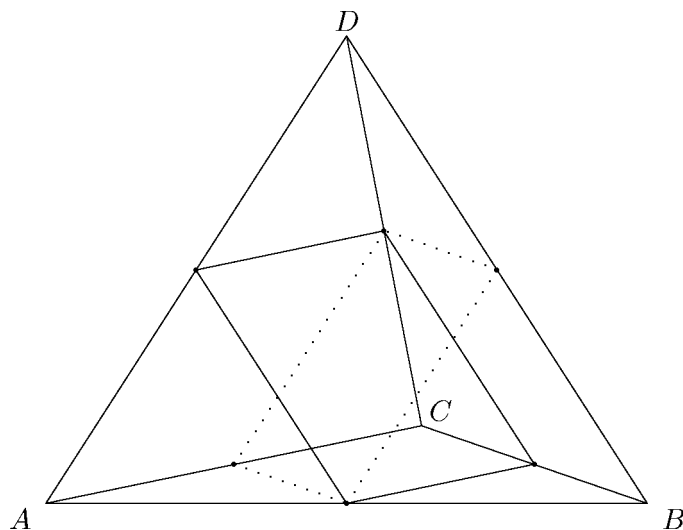
Der Vergleich mit der vorangehenden Aufgabe zeigt, daß S der Schwerpunkt des Tetraeders ist.

b) Es ist

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AB}B} + \overrightarrow{BM_{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Genauso berechnet man $\overrightarrow{M_{DA}M_{CD}} = \overrightarrow{M_{AD}M_{DC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ und stellt die Übereinstimmung fest: $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ ist ein Parallelogramm. Dabei sind die Mittelpunkte der Reihe nach entsprechend der Reihenfolge $ABCD$ gebildet. Die bisherigen Überlegungen gelten für *jede* Reihenfolge der 4 Punkte: $ABDC$, $ACBD$. (Es gibt noch drei weitere Anordnungen der 4 Punkte $ACDB$, $ADBC$ und $ADCB$, die aber zu keinem neuen Parallelogramm führen.)

Die in a) betrachteten Verbindungsgeraden *gegenüberliegender* Kantenmitten sind gerade die Diagonalen dieser Parallelogramme, die sich bekanntlich gegenseitig halbieren (daher in a) $r = s = 1/2$). Nach a) ist der Tetraederschwerpunkt der Diagonalschnittpunkt aller drei Parallelogramme.



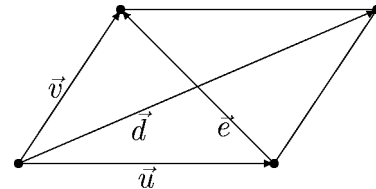
Übungen (6)

- 1) Zeigen Sie für ein beliebiges Parallelogramm die Gültigkeit der folgenden *Parallelogrammrelation*:

Die Summe der Längenquadrate beider Diagonalen ist gleich der Summe der Längenquadrate der vier Seiten.

Mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Skizze bedeutet dies:

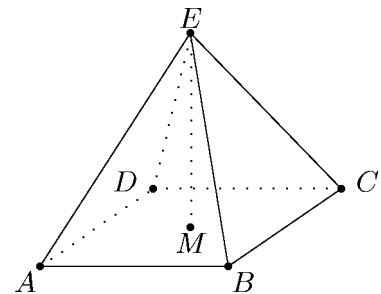
$$|\vec{d}|^2 + |\vec{e}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2.$$



- 2) Gegeben sind 5 Punkte $A = (3 \mid -4 \mid -1)$, $B = (5 \mid 0 \mid 3)$, $C = (9 \mid 2 \mid -1)$, $D = (7 \mid -2 \mid -5)$ und $E = (0 \mid 5 \mid -4)$.

a) Zeigen Sie, daß $ABCD$ die Ecken eines Rechtecks sind. Wie lang sind die Seiten?

b) Zeigen Sie, daß die 5 Punkte $ABCDE$ eine *senkrechte quadratische Pyramide* bilden. Dies bedeutet: Die Spitze E liegt *orthogonal* über dem Mittelpunkt der *quadratischen* Grundfläche $ABCD$ (siehe Skizze).



c) Wie hoch ist die Pyramide?

- 3) Gegeben ist das Dreieck mit den Ecken $A = (2 \mid 3)$, $B = (6 \mid 7)$, $C = (7 \mid 11)$. Fertigen Sie parallel zur Lösung der folgenden Aufgabe eine genaue Skizze an und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse daran.

a) Bestimmen Sie für alle drei Höhen die Höhenfußpunkte und die Längen der Höhen.

b) Stellen Sie fest, welche Höhenfußpunkte auf der jeweiligen Dreiecksseite *zwischen* den Ecken liegen, und welche *außerhalb*.

- 4) Aus der Physik übernehmen wir: Ein Körper (mit ebenen Begrenzungsflächen) steht stabil auf einer seiner Begrenzungsflächen, wenn das *Lot* vom *Schwerpunkt* des Körpers auf die Bodenebene seinen Fußpunkt im *Innern* der Auflagefläche hat.

a) Wir wollen zunächst ein 2-dimensionales Beispiel betrachten. Dieses ist realitätsferner, dafür aber einfacher! Wir gehen aus von dem in der vorigen Aufgabe gegebenen Dreieck. (Ergänzen Sie Ihre bisherige Skizze!) Stellen Sie fest, auf welcher seiner Seiten das Dreieck stabil stehen kann.

b) Nun ein reales dreidimensionales Beispiel: Wir betrachten ein Tetraeder mit den Ecken $A = (0 \mid 1 \mid -2)$, $B = (5 \mid 5 \mid 6)$, $C = (3 \mid 1 \mid -2)$ und $D = (0 \mid 5 \mid -2)$. Stellen Sie fest, auf welchen seiner vier Seiten das Tetraeder stabil stehen kann.

Übungen (6) — Lösungen

1) $\vec{d} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{e} = \vec{v} - \vec{u}$, also

$$\begin{aligned} |\vec{d}|^2 + |\vec{e}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

2) a) Wegen $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Wegen

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \text{also } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 8 + 8 - 16 = 0$$

sind die Kantenvektoren dieses Parallelogramms orthogonal; es liegt also ein Rechteck vor. Wegen

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6, \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$$

haben die Rechtecksseiten die gleiche Länge 6; es liegt sogar ein Quadrat vor.

b) Wir zeigen zunächst, daß E nicht zu der Ebene gehört, in der $ABCD$ liegen. Dazu überprüfen wir, daß die Vektoren

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, etwa indem wir den Rang der Matrix mit den Spaltenvektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 9 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 15 \\ 0 & -12 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$

Da der Rang 3 ist, sind die drei Spaltenvektoren linear unabhängig und die Punkte $ABCE$ liegen nicht in einer Ebene.

Da die Grundfläche nach dem in a) Bewiesenen ein Quadrat ist, bleibt nur noch zu zeigen, daß der Verbindungsvektor vom Mittelpunkt M des Quadrates zur Spitze E orthogonal ist zur Bodenebene. Wir berechnen M als Mittelpunkt zwischen AC und erhalten $M = (6 \mid -1 \mid -1)$. Da \vec{u}, \vec{v} zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Bodenebene sind, genügt es zu zeigen, daß \overrightarrow{ME} orthogonal zu \vec{u} und \vec{v} ist:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ME} &= \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \implies \overrightarrow{ME} \cdot \vec{u} &= -12 + 24 - 12 = 0, \quad \overrightarrow{ME} \cdot \vec{v} = -24 + 12 + 12 = 0. \end{aligned}$$

c) Die Höhe der Pyramide ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$,

also gleich $\sqrt{36 + 36 + 9} = 9$.

3) Höhe durch C: Die C gegenüberliegende Dreiecksseite ist die Gerade $g(A, B)$ durch A, B ; sie hat die Parameterdarstellung

$$X \in g(A, B) \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Höhenfußpunkt H ist durch zwei Bedingungen gekennzeichnet:

1. H liegt auf der Dreiecksseite $g(A, B)$:

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

2. Der Verbindungsvektor \overrightarrow{CH} ist orthogonal zu der Geraden $g(A, B)$, d. h. orthogonal zum Richtungsvektor \overrightarrow{AB} :

$$0 = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Diese zweite Bedingung stellt eine lineare Gleichung für die eine Unbekannte r dar:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 4r \\ -8 + 4r \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \implies 0 &= \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = -20 + 16r - 32 + 16r \iff 32r = 52 \iff r = \frac{13}{8}. \end{aligned}$$

Damit erhält man den Höhenfußpunkt durch

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{13}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 19/2 \end{pmatrix}, \quad H = \left(\frac{17}{2} \mid \frac{19}{2}\right).$$

Da der Parameterwert r für den Höhenfußpunkt H *größer* als 1 ist, liegt H nicht *zwischen* A und B , sondern *außerhalb* der Strecke AB , und zwar auf der Seite von B . Die Länge h_C der Höhe durch C ist die Länge des Verbindungsvektors

$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$, also

$$h_C = |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,12.$$

Höhe durch B: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Der gesuchte Höhenfußpunkt H ist nun gekennzeichnet durch

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} &\iff \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right] \perp \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 0 = -20 - 32 + r(25 + 64) = -52 + 89r \iff r = \frac{52}{89}. \end{aligned}$$

Da der Parameterwert zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Höhenfußpunkt auf der Dreiecksseite *zwischen* A und C . Explizit ergibt sich

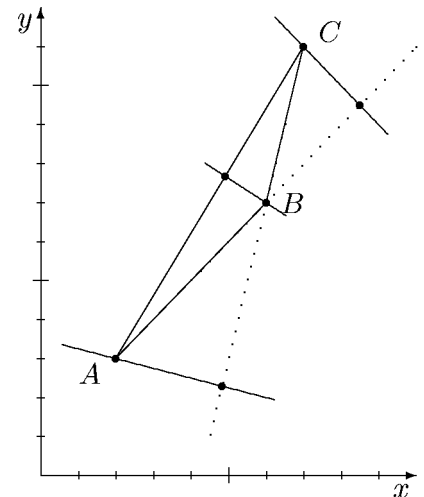
$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{52}{89} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{89} \begin{pmatrix} 438 \\ 683 \end{pmatrix}, \quad H = \left(\frac{438}{89} \mid \frac{683}{89} \right) \approx (4,92 \mid 7,67).$$

Die Länge h_B der Höhe ist

$$|\overrightarrow{BH}| = \left| \begin{pmatrix} -96/89 \\ 60/89 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{12816}{89^2}} = \sqrt{\frac{144}{89}} = \frac{12}{\sqrt{89}} \approx 1,27.$$

Die Ergebnisse für die Höhe durch A und Skizze:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{AH} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \iff r = -\frac{20}{17}, \\ \implies H &= \left(\frac{82}{17} \mid \frac{39}{17} \right) \approx (4,82 \mid 2,29) \\ \implies \overrightarrow{AH} &= \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 48 \\ -12 \end{pmatrix} \\ \implies h_A &= \sqrt{\frac{2448}{17^2}} = \sqrt{\frac{144}{17}} = \frac{12}{\sqrt{17}} \approx 2,91. \end{aligned}$$



Da der Parameterwert r negativ ist, liegt der Höhenfußpunkt nicht *zwischen* B und C , sondern *außerhalb*, und zwar auf der Seite von B .

- 4) a) Wir berechnen den Schwerpunkt $S = (5 \mid 7)$ und dann die Fußpunkte der *Lote von S auf die Dreiecksseiten*.

Lot auf $g(A, B)$: Der Lotfußpunkt H soll auf der Geraden $g(A, B)$ liegen, also $\overrightarrow{AH} = r\overrightarrow{AB}$ mit einer (gesuchten) Zahl $r \in \mathbb{R}$. Da H der Lotfußpunkt von S aus ist, muß \overrightarrow{SH} zu \overrightarrow{AB} orthogonal sein:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB} = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \iff 0 &= -12 + 16r - 16 + 16r \iff r = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Da der Parameterwert r zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Lotfußpunkt *zwischen* A und B : Das Dreieck kann auf dieser Dreiecksseite stabil stehen.

Lot auf $g(B, C)$: $\overrightarrow{BH} = +r\overrightarrow{BC}$ und

$$0 = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{BC} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -1 + r + 16r \iff r = -\frac{1}{17}.$$

Da der Parameterwert negativ ist, liegt der Lotfußpunkt nicht zwischen den Eckpunkten (wenn auch sehr dicht bei der Ecke B); auf der Dreiecksseite BC kann das Dreieck nicht stabil stehen. Es kippt zu der Seite, bei der B liegt, (und bleibt dann

auf der Dreiecksseite durch A, B stabil liegen).

Lot auf $g(A, C)$: $\overrightarrow{AH} = r\overrightarrow{AC}$ und

$$0 = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = -15 + 25r - 32 + 64r \iff r = \frac{47}{89}.$$

Wieder liegt der Lotfußpunkt des Schwerpunktes *zwischen* den Eckpunkten und wieder ist das Dreieck auf dieser Seite standfest.

[In diesem letzten Fall braucht man nichts zu rechnen, wenn man die anschaulich einsichtige Tatsache beweist: Liegt der Höhenfußpunkt zwischen den Ecken, so gilt dies erst recht für den Fußpunkt des Schwerpunktlotes. Wenn man dies zu beweisen versucht, findet man eine allgemeingültige Beziehung zwischen Höhenfußpunkt, Fußpunkt der Schwerpunktlotes und Seitenmittelpunkt: Der Lotfußpunkt liegt *zwischen* Höhenfußpunkt und Seitenmittelpunkt und teilt diese Strecke im Verhältnis 2:1. Für die Parameterwerte r_H des Höhenfußpunktes, r_L des Lotfußpunktes und $r_M = \frac{1}{2}$ des Mittelpunktes bedeutet dies:

$$r_L = r_H + \frac{2}{3}(r_M - r_H) = r_H + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3}r_H = \frac{1}{3}r_H + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(r_H + 1).$$

Vergleichen Sie diese Formel mit den Ergebnissen für r_H aus Aufgabe 3) und für r_L in Aufgabe 4) a).]

b) Wir berechnen den Schwerpunkt S des Tetraeders gemäß $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ und erhalten $S = (2 \mid 3 \mid 0)$ und bestimmen dann die Lotfußpunkte von S aus auf die vier Begrenzungsflächen des Tetraeders.

Seitenfläche ABC : Der Lotfußpunkt heiße H ; er gehört zur Ebene durch ABC , also

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da SH zur Ebene durch ABC orthogonal sein soll, muß gelten

$$0 = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{und} \quad 0 = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

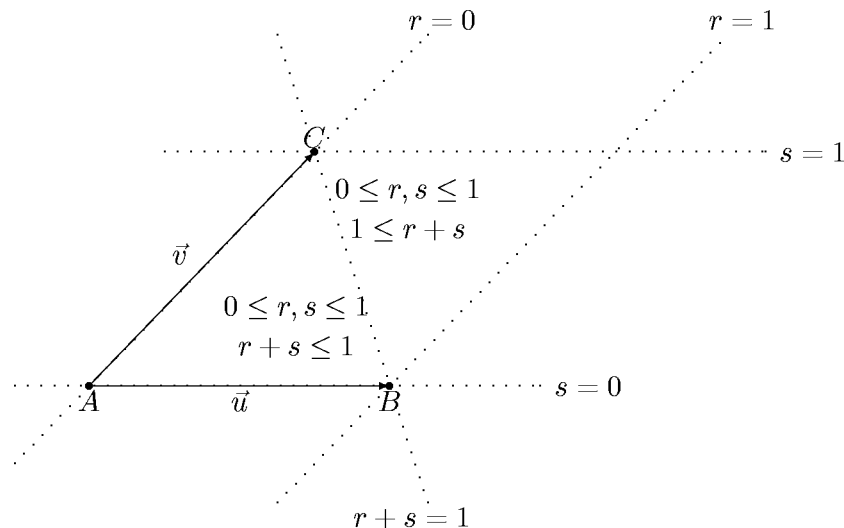
Dies ergibt *zwei* lineare Gleichungen für die beiden unbekanntenen Parameterwerte r, s :

$$0 = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -34 + 105r + 15s$$

$$0 = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 + 15r + 9s.$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 3/10$, $s = 1/6$. Beide Parameterwerte liegen zwischen 0 und 1, daher liegt der zugehörige Punkt H innerhalb des *Parallelogramms*,

das von den Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ bestimmt wird (siehe Skizze).



Die Frage der Aufgabenstellung ist aber, ob H innerhalb des *Dreiecks* ABC liegt. Dazu muß zusätzlich gelten: $r + s \leq 1$. (Begründung: Auf der Geraden durch B und C liegen die Punkte X , für die die Parameterwerte zusammen genau 1 ergeben; die Punkte mit $r + s < 1$ liegen ganz auf einer Seite der Geraden $g(B, C)$, und zwar bei A .) Insgesamt:

$$H \text{ liegt im Dreieck } ABC \iff r, s \geq 0 \text{ und } r + s \leq 1.$$

Für die oben gefundenen Werte $r = 3/10$ und $s = 1/6$ sind beide Bedingungen erfüllt: Der Lotfußpunkt H liegt *im* Dreieck ABC ; das Tetraeder kann auf dieser Seite stabil stehen.

Seitenfläche ABD : Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -34 + 105r + 16s \\ 0 &= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -8 + 16r + 16s. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 26/89$, $s = 37/178$. Es gilt für diese Werte $r, s \geq 0$ und $r + s \leq 1$, also liegt wieder der Lotfußpunkt H *in* dem entsprechenden Seitendreieck ABD : Auch auf dieser Seite kann das Tetraeder stehen.

Seitenfläche ACD : Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 + 9r \\ 0 &= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -8 + 16s. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 2/3$, $s = 1/2$. Es gilt für diese Werte zwar wieder $r, s \geq 0$, aber nun ist $r + s > 1$, also liegt der Lotfußpunkt H *außerhalb* des entsprechenden Seitendreiecks ACD : Auf dieser Seite kann das Tetraeder nicht stabil stehen.

Seitenfläche BCD : Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SB} + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BC} + r \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = -62 + 84r + 74s \\ 0 &= \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BD} + r \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} + s \cdot \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} = -63 + 74r + 89s. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 107/250$, $s = 44/125$. Wegen $r, s \geq 0$ und $r + s \leq 1$, liegt der Lotfußpunkt H wieder *in* dem entsprechenden Seitendreieck BCD : Auch auf dieser Seite kann das Tetraeder stehen.

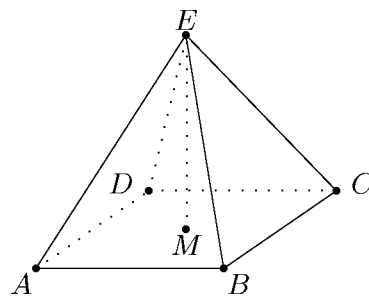
Übungen (7)

- 1) Gegeben sind 5 Punkte $A = (3 \mid -4 \mid -1)$, $B = (5 \mid 0 \mid 3)$, $C = (9 \mid 2 \mid -1)$, $D = (7 \mid -2 \mid -5)$ und $E = (0 \mid 5 \mid -4)$.

a) Zeigen Sie, daß $ABCD$ die Ecken eines Rechtecks sind. Wie lang sind die Seiten?

b) Zeigen Sie, daß die 5 Punkte $ABCDE$ eine *senkrechte quadratische Pyramide* bilden. Dies bedeutet: Die Spitze E liegt *orthogonal* über dem Mittelpunkt der *quadratischen* Grundfläche $ABCD$ (siehe Skizze).

c) Wie hoch ist die Pyramide?

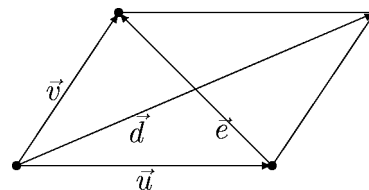


- 2) Zeigen Sie für ein beliebiges Parallelogramm die Gültigkeit der folgenden

Parallelogrammrelation:

Die Summe der Längenquadrate beider Diagonalen ist gleich der Summe der Längenquadrate der vier Seiten.

Mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Skizze bedeutet dies:



$$|\vec{d}|^2 + |\vec{e}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2.$$

- 3) Gegeben ist das Dreieck mit den Ecken $A = (2 \mid 3)$, $B = (6 \mid 7)$, $C = (7 \mid 11)$. Fertigen Sie parallel zur Lösung der folgenden Aufgabe eine genaue Skizze an und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse daran.

a) Bestimmen Sie für alle drei Höhen die Höhenfußpunkte und die Längen der Höhen.

b) Stellen Sie fest, welche Höhenfußpunkte auf der jeweiligen Dreiecksseite *zwischen* den Ecken liegen, und welche *außerhalb*.

c) Zeigen Sie in diesem konkreten Fall, daß sich alle Höhen in demselben Punkt schneiden. Bestimmen Sie diesen.

- 4) Es sei ABC ein Dreieck und $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Es bezeichne H den Schnittpunkt der Höhe durch B mit der Höhe durch C (Skizze).

a) Begründen Sie der Reihe nach:

$$\overrightarrow{BH} \perp \vec{v}, \quad \overrightarrow{AH} = \vec{u} + \overrightarrow{BH}, \quad \overrightarrow{AH} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v},$$

$$\overrightarrow{CH} \perp \vec{u}, \quad \overrightarrow{AH} = \vec{v} + \overrightarrow{CH}, \quad \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u},$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 0.$$

b) Folgern Sie: H liegt auf der Höhe durch A ; die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt.

Übungen (7) — Lösungen

1) a) Wegen $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Wegen

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \text{also } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 8 + 8 - 16 = 0$$

sind die Kantenvektoren dieses Parallelogramms orthogonal; es liegt also ein Rechteck vor. Wegen

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6, \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$$

haben die Rechtecksseiten die *gleiche* Länge 6; es liegt sogar ein Quadrat vor.

b) Wir zeigen zunächst, daß E nicht zu der Ebene gehört, in der $ABCD$ liegen. Dazu überprüfen wir, daß die Vektoren

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, etwa indem wir den Rang der Matrix mit den Spaltenvektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 9 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 15 \\ 0 & -12 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$

Da der Rang 3 ist, sind die drei Spaltenvektoren linear unabhängig und die Punkte $ABCE$ liegen nicht in einer Ebene.

Da die Grundfläche nach dem in a) Bewiesenen ein Quadrat ist, bleibt nur noch zu zeigen, daß der Verbindungsvektor vom Mittelpunkt M des Quadrates zur Spitze E orthogonal ist zur Bodenebene. Wir berechnen M als Mittelpunkt zwischen AC und erhalten $M = (6 \mid -1 \mid -1)$. Da \vec{u}, \vec{v} zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Bodenebene sind, genügt es zu zeigen, daß \overrightarrow{ME} orthogonal zu \vec{u} und \vec{v} ist:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ME} &= \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \implies \overrightarrow{ME} \cdot \vec{u} &= -12 + 24 - 12 = 0, \quad \overrightarrow{ME} \cdot \vec{v} = -24 + 12 + 12 = 0. \end{aligned}$$

c) Die Höhe der Pyramide ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, also $\sqrt{36 + 36 + 9} = 9$.

2) $\vec{d} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{e} = \vec{v} - \vec{u}$, also

$$\begin{aligned} |\vec{d}|^2 + |\vec{e}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

3) Höhe durch C : Die C gegenüberliegende Dreiecksseite ist die Gerade $g(A, B)$ durch A, B ; sie hat die Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Höhenfußpunkt H ist durch zwei Bedingungen gekennzeichnet:

1. H liegt auf der Dreiecksseite $g(A, B)$:

$$\vec{h} = \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

2. Der Verbindungsvektor \overrightarrow{CH} ist orthogonal zu der Geraden $g(A, B)$, d. h. orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$:

$$0 = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Diese zweite Bedingung stellt eine lineare Gleichung für die eine Unbekannte r dar:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 4r \\ -8 + 4r \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \implies 0 &= \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = -20 + 16r - 32 + 16r \iff 32r = 52 \iff r = \frac{13}{8}. \end{aligned}$$

Damit erhält man den Höhenfußpunkt durch

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{13}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 19/2 \end{pmatrix}, \quad H = \left(\frac{17}{2} \mid \frac{19}{2} \right).$$

Da der Parameterwert r für den Höhenfußpunkt H größer als 1 ist, liegt H nicht zwischen A und B , sondern *außerhalb* der Strecke AB , und zwar auf der Seite von B . Die Länge h_C der Höhe durch C ist die Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$, also

$$h_C = |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,12.$$

Höhe durch B : $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Der gesuchte Höhenfußpunkt H ist nun gekennzeichnet durch

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} &\iff \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right] \perp \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 0 = -20 - 32 + r(25 + 64) = -52 + 89r \iff r = \frac{52}{89}. \end{aligned}$$

Da der Parameterwert zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Höhenfußpunkt auf der Dreiecksseite *zwischen* A und C . Explizit ergibt sich

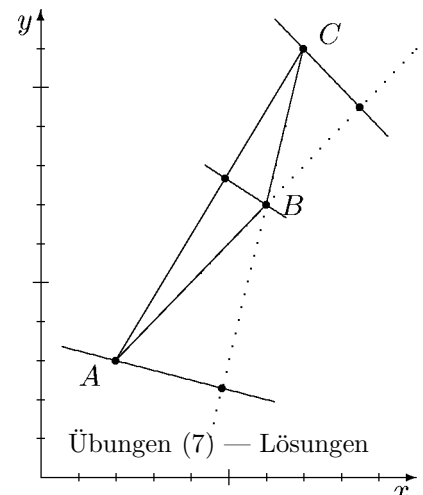
$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{52}{89} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{89} \begin{pmatrix} 438 \\ 683 \end{pmatrix}, \quad H = \left(\frac{438}{89} \mid \frac{683}{89} \right) \approx (4,92 \mid 7,67).$$

Die Länge h_B der Höhe ist

$$|\overrightarrow{BH}| = \left| \begin{pmatrix} -96/89 \\ 60/89 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{12816}{89^2}} = \sqrt{\frac{144}{89}} = \frac{12}{\sqrt{89}} \approx 1,27.$$

Die Ergebnisse für die Höhe durch A und Skizze:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{AH} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \iff r = -\frac{20}{17}, \\ \implies H &= \left(\frac{82}{17} \mid \frac{39}{17} \right) \approx (4,82 \mid 2,29) \\ \implies \overrightarrow{AH} &= \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 48 \\ -12 \end{pmatrix} \\ \implies h_A &= \sqrt{\frac{2448}{17^2}} = \sqrt{\frac{144}{17}} = \frac{12}{\sqrt{17}} \approx 2,91. \end{aligned}$$



Da der Parameterwert r negativ ist, liegt der Höhenfußpunkt nicht *zwischen* B und C , sondern *außerhalb*, und zwar auf der Seite von B .

c) Wir stellen die Parameterdarstellungen für die drei Höhen auf:

$$g(A, H_A): \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AH_A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 48/17 \\ -12/17 \end{pmatrix},$$

$$g(B, H_B): \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{BH_B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -96/89 \\ 60/89 \end{pmatrix},$$

$$g(C, H_C): \vec{x} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CH_C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix},$$

und bestimmen zunächst den Schnittpunkt der ersten beiden. Die erweiterte Matrix des zugehörigen Gleichungssystems und die Gauß-Umformungen ergeben dann:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 48/17 & 96/89 & 4 \\ -12/17 & -60/89 & 4 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 48/17 & 96/89 & 4 \\ 0 & -144/89 & 20 \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung (Rang $r = 2 = n = m$), es gibt also genau einen Schnittpunkt. Wir erhalten

$$-\frac{144}{89} \cdot s = 20 \iff s = \frac{445}{36}$$

und durch Einsetzung dieses Parameterwertes den Schnittpunkt

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{445}{36} \begin{pmatrix} -96/89 \\ 60/89 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen nun, ob dieser Punkt $S = (58/3 \mid -4/3)$ auch auf der dritten Höhe liegt:

$$\begin{pmatrix} 58/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 37/3 \\ -37/3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektorgleichung hat offenbar eine Lösung ($t = 74/9$), also liegt S auf allen drei Höhen!

- 4) a) \overrightarrow{BH} ist ein Richtungsvektor der Höhe durch B und somit orthogonal zu $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Es ist $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \vec{u} + \overrightarrow{BH}$ und daher $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \overrightarrow{BH}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{BH} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + 0$, wegen $\overrightarrow{BH} \perp \vec{v}$.

Die zweite Reihe von Behauptungen beweist man ganz genauso (C ersetzt B und \vec{u}, \vec{v} tauschen folglich die Rollen).

Schließlich gilt $\overrightarrow{AH} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{v} - \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ nach den vorangehenden Behauptungen.

- b) Es ist $\vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, so daß nach der letzten Behauptung von a) $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ ist. Dies bedeutet aber, daß H auf der Höhe durch A liegt. Damit liegt H auf allen drei Höhen; H ist der gemeinsame Schnittpunkt aller drei Höhen.

Übungen (8)

- 1) Aus der Physik übernehmen wir: Ein Körper (mit ebenen Begrenzungsflächen) steht stabil auf einer seiner Begrenzungsflächen, wenn das *Lot* vom *Schwerpunkt* des Körpers auf die Bodenebene seinen Fußpunkt im *Innern* der Auflagefläche hat.
- a) Wir wollen zunächst ein 2-dimensionales Beispiel betrachten. Dieses ist realitätsferner, dafür aber einfacher! Wir gehen aus von dem in Übungen (7), Aufgabe 3 gegebenen Dreieck. (Ergänzen Sie Ihre bisherige Skizze!) Stellen Sie fest, auf welcher seiner Seiten das Dreieck stabil stehen kann.
- b) Nun ein reales dreidimensionales Beispiel: Wir betrachten ein Tetraeder mit den Ecken $A = (0 \mid 1 \mid -2)$, $B = (5 \mid 5 \mid 6)$, $C = (3 \mid 1 \mid -2)$ und $D = (0 \mid 5 \mid -2)$. Stellen Sie fest, auf welchen seiner vier Seiten das Tetraeder stabil stehen kann.
- 2) a) Begründen Sie für zwei beliebige Vektoren \vec{u} , \vec{v} durch geeignete Rechnung mit dem Skalarprodukt:

$$\vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v} \iff |\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 .$$

Erläutern Sie den Zusammenhang mit binomischen Formeln.

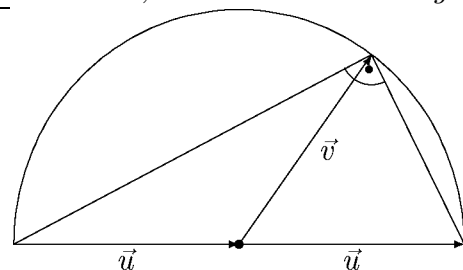
Folgern Sie aus dieser Beziehung die nachfolgenden geometrischen Sachverhalte:

- b) Ein Parallelogramm ist genau dann eine *Raute* (d. h. hat 4 gleichlange Seiten), wenn die Diagonalen orthogonal zueinander sind.
- c) Ein Dreieck ist genau dann *gleichschenkelig*, wenn eine Seitenhalbierende die Gegenseite senkrecht schneidet bzw. wenn eine Mittelsenkrechte durch den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft.
- d) Die Ortslinie aller Punkte, die von zwei verschiedenen Punkten A, B denselben Abstand haben, ist die Mittelsenkrechte von A, B .
- e) Der Schnittpunkt der drei *Mittelsenkrechten* eines Dreiecks ist der Mittelpunkt des *Umkreises*.
- f) Erläutern Sie mittels c), daß die folgende Definition unserer Anschauung entspricht:

Sind \vec{u}, \vec{v} zwei linear unabhängige und gleichlange Vektoren, so ist $\vec{u} + \vec{v}$ Richtungsvektor der Winkelhalbierenden.

- f) Folgern Sie aus a) (mit Hilfe nebenstehender Skizze) den Satz des *Thales*:

Verbindet man die beiden Endpunkte eines Kreisdurchmessers mit irgendeinem anderen Punkt des Kreises, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Durchmesser als Hypotenuse.



- h) Formulieren und begründen Sie die *Umkehrung* des Satzes des Thales.

- 3) Berechnen Sie für das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (3 \mid -1)$, $B = (-1 \mid 1)$, $C = (0 \mid 4)$
- a) den Schwerpunkt S ,
- b) den Höhenschnittpunkt H , sowie
- c) den Umkreismittelpunkt M .
- Fertigen Sie parallel zu Ihrer Rechnung eine saubere Skizze an.

Übungen (8) — Lösungen

1) a) Wir berechnen den Schwerpunkt $S = (5 \mid 7)$ und dann die Fußpunkte der *Lote von S auf die Dreiecksseiten*.

Lot auf $g(A, B)$: Der Lotfußpunkt H soll auf der Geraden $g(A, B)$ liegen, also $\overrightarrow{AH} = r\overrightarrow{AB}$ mit einer (gesuchten) Zahl $r \in \mathbb{R}$. Da H der Lotfußpunkt von S aus ist, muß \overrightarrow{SH} zu \overrightarrow{AB} orthogonal sein:

$$0 = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB} = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\iff 0 = -12 + 16r - 16 + 16r \iff r = \frac{7}{8}.$$

Da der Parameterwert r zwischen 0 und 1 liegt, liegt der Lotfußpunkt *zwischen* A und B : Das Dreieck kann auf dieser Dreiecksseite stabil stehen.

Lot auf $g(B, C)$: $\overrightarrow{BH} = +r\overrightarrow{BC}$ und

$$0 = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{BC} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -1 + r + 16r \iff r = -\frac{1}{17}.$$

Da der Parameterwert negativ ist, liegt der Lotfußpunkt nicht zwischen den Eckpunkten (wenn auch sehr dicht bei der Ecke B); auf der Dreiecksseite BC kann das Dreieck nicht stabil stehen. Es kippt zu der Seite, bei der B liegt, (und bleibt dann auf der Dreiecksseite durch A, B stabil liegen).

Lot auf $g(A, C)$: $\overrightarrow{AH} = r\overrightarrow{AC}$ und

$$0 = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = -15 + 25r - 32 + 64r \iff r = \frac{47}{89}.$$

Wieder liegt der Lotfußpunkt des Schwerpunktes *zwischen* den Eckpunkten und wieder ist das Dreieck auf dieser Seite standfest.

[In diesem letzten Fall braucht man nichts zu rechnen, wenn man die anschaulich einsichtige Tatsache beweist: Liegt der Höhenfußpunkt zwischen den Ecken, so gilt dies erst recht für den Fußpunkt des Schwerpunktlotes. Wenn man dies zu beweisen versucht, findet man eine allgemeingültige Beziehung zwischen Höhenfußpunkt, Fußpunkt der Schwerpunktlotes und Seitenmittelpunkt: Der Lotfußpunkt liegt *zwischen* Höhenfußpunkt und Seitenmittelpunkt und teilt diese Strecke im Verhältnis 2:1. Für die Parameterwerte r_H des Höhenfußpunktes, r_L des Lotfußpunktes und $r_M = \frac{1}{2}$ des Mittelpunktes bedeutet dies:

$$r_L = r_H + \frac{2}{3}(r_M - r_H) = r_H + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3}r_H = \frac{1}{3}r_H + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(r_H + 1).$$

Vergleichen Sie diese Formel mit den Ergebnissen für r_H aus Aufgabe 3) und für r_L in Aufgabe 4) a).]

b) Wir berechnen den Schwerpunkt S des Tetraeders gemäß $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ und erhalten $S = (2 \mid 3 \mid 0)$ und bestimmen dann die Lotfußpunkte von

S aus auf die vier Begrenzungsflächen des Tetraeders.

Seitenfläche ABC : Der Lotfußpunkt heiße H ; er gehört zur Ebene durch ABC , also

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da SH zur Ebene durch ABC orthogonal sein soll, muß gelten

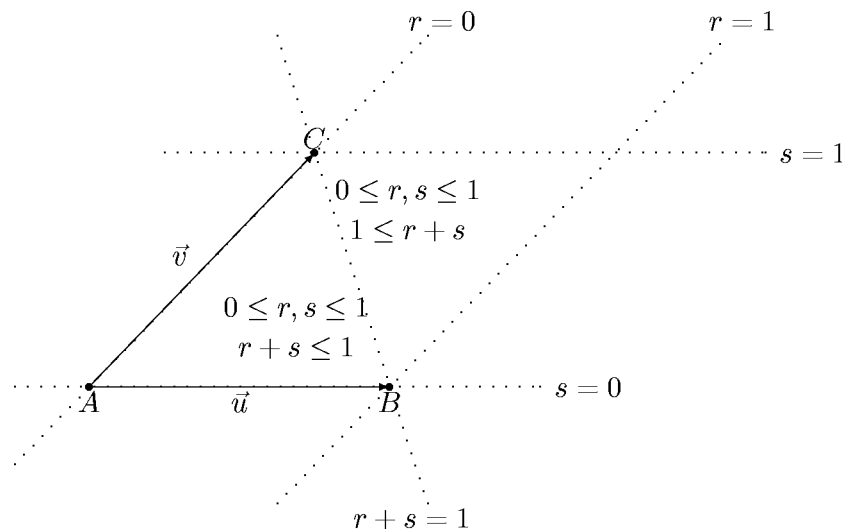
$$0 = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{und} \quad 0 = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Dies ergibt *zwei* lineare Gleichungen für die beiden unbekanntenen Parameterwerte r, s :

$$0 = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -34 + 105r + 15s$$

$$0 = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 + 15r + 9s.$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 3/10$, $s = 1/6$. Beide Parameterwerte liegen zwischen 0 und 1, daher liegt der zugehörige Punkt H innerhalb des *Parallelogramms*, das von den Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ bestimmt wird (siehe Skizze).



Die Frage der Aufgabenstellung ist aber, ob H innerhalb des *Dreiecks* ABC liegt. Dazu muß zusätzlich gelten: $r+s \leq 1$. (Begründung: Auf der Geraden durch B und C liegen die Punkte X , für die die Parameterwerte zusammen genau 1 ergeben; die Punkte mit $r+s < 1$ liegen ganz auf einer Seite der Geraden $g(B, C)$, und zwar bei A .) Insgesamt:

$$H \text{ liegt im Dreieck } ABC \iff r, s \geq 0 \text{ und } r+s \leq 1.$$

Für die oben gefundenen Werte $r = 3/10$ und $s = 1/6$ sind beide Bedingungen erfüllt: Der Lotfußpunkt H liegt *im* Dreieck ABC ; das Tetraeder kann auf dieser Seite stabil stehen.

Seitenfläche ABD : Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -34 + 105r + 16s \\ 0 &= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -8 + 16r + 16s. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 26/89$, $s = 37/178$. Es gilt für diese Werte $r, s \geq 0$ und $r + s \leq 1$, also liegt wieder der Lotfußpunkt H *in* dem entsprechenden Seitendreieck ABD : Auch auf dieser Seite kann das Tetraeder stehen.

Seitenfläche ACD : Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 + 9r \\ 0 &= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AD} + r \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -8 + 16s. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 2/3$, $s = 1/2$. Es gilt für diese Werte zwar wieder $r, s \geq 0$, aber nun ist $r + s > 1$, also liegt der Lotfußpunkt H *außerhalb* des entsprechenden Seitendreiecks ACD : Auf dieser Seite kann das Tetraeder nicht stabil stehen.

Seitenfläche BCD : Es gilt für den Lotfußpunkt H auf dieser Seite:

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SB} + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

und die Gleichungen für r, s lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BC} + r \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = -62 + 84r + 74s \\ 0 &= \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BD} + r \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} + s \cdot \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} = -63 + 74r + 89s. \end{aligned}$$

Die (eindeutige) Lösung ist $r = 107/250$, $s = 44/125$. Wegen $r, s \geq 0$ und $r + s \leq 1$, liegt der Lotfußpunkt H wieder *in* dem entsprechenden Seitendreieck BCD : Auch auf dieser Seite kann das Tetraeder stehen.

Beispiele zur Abstandsberechnung

- 1) a) Zeigen Sie, daß die 4 'Fußpunkte' der Pyramide (Übungen (7), Aufgabe 1) in der Ebene mit der Gleichung $2x - 2y + z - 13 = 0$ liegen.
 b) Berechnen Sie mit der Hesse'schen Abstandsformel die Höhe der Pyramide.

Lösung:

- a) Alle 4 Punkte A, B, C, D erfüllen die angegebene Gleichung.
 b) Die Höhe der Pyramide ist der Abstand des Punktes E von der Ebene e durch A, B, C, D . Dieser berechnet sich nach der Hesse'schen Abstandsformel gemäß

$$d(P, e) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 5 - 4 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{27}{\sqrt{9}} = 9.$$

- 2) Wir gehen aus von dem Dreieck von Übungen (7), Aufgabe 3.
 a) Bestimmen Sie Normalenvektoren für die Dreiecksseiten und damit dann Gleichungen für sie.
 [Zur Kontrolle: $g(A, B) : x - y + 1 = 0$, $g(A, C) : 8x - 5y - 1 = 0$, $g(B, C) : 4x - y - 17 = 0$.]
 b) Berechnen Sie die Länge der drei Höhen des Dreiecks.

Lösung:

a) Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, ein Normalenvektor ist $\vec{n}_c = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ und eine Gleichung daher von der Form $4x - 4y + d = 0$. Setzt man $A = (2 | 3)$ ein, so erhält man $8 - 12 + d = 0$, also $d = 4$. Eine Gleichung für $g(A, B)$ ist also $4x - 4y + 4 = 0$ oder äquivalent $x - y + 1 = 0$.

Es ist $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_b = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $8x - 5y + d = 0$ eine Gleichung und nach Einsetzen von $A = (2 | 3)$ ergibt sich $16 - 15 + d = 0$, also $d = -1$. Die gefundene Gleichung ist daher $8x - 5y - 1 = 0$.

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_a = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, Gleichung $4x - y + d = 0$, Einsetzen von $B = (6 | 7)$ ergibt $24 - 7 + d = 0$, also $d = -17$. Die Gleichung also wie angegeben.

- b) Berechnung der Abstände der Eckpunkte von den gegenüberliegenden Seiten:

$$d(C, g(A, B)) = \frac{|7 - 11 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$d(B, g(A, C)) = \frac{|8 \cdot 6 - 5 \cdot 7 - 1|}{\sqrt{64 + 25}} = \frac{12}{\sqrt{89}},$$

$$d(A, g(B, C)) = \frac{|8 - 3 - 17|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{17}}.$$