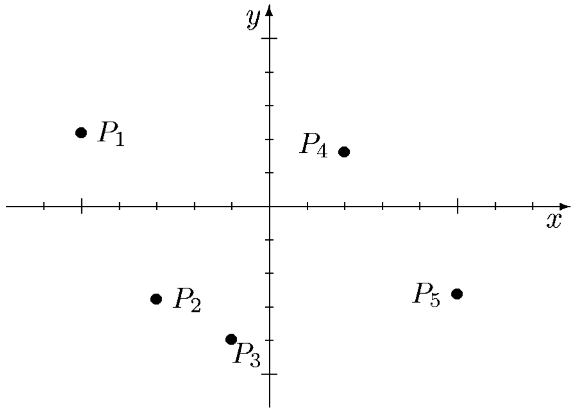
Approximation beliebiger Funktionen durch ganz-rationale.

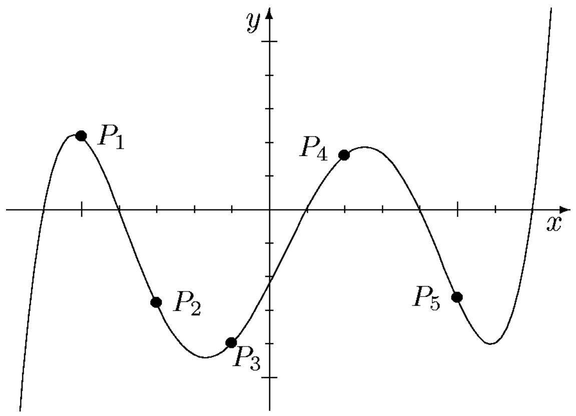
1. Interpolation: *Zu beliebig vorgegebenen verschiedenen Stellen* $x_1, \ldots, x_k$ *und beliebigen Werten* $y_1, \ldots, y_k$ *gibt es immer genau eine ganzrationale Funktion* p *vom Grade* $< k$*, die an den vorgegebenen Stellen* x_i *die vorgeschriebenen Werte* y_i *annimmt:*

$$p(x_1) = y_1\,;\; p(x_2) = y_2\; \ldots\; p(x_k) = y_k\,.$$

Geometrisch bedeutet dies: Gibt man in der Koordinatenebene k Punkte $P_i = (x_i, y_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ vor, und sind die x-Koordinaten dieser Punkte verschieden, so gibt es genau eine ganzrationale Funktion



p vom Grad $< k$, deren Graph durch die vorgegebenen Punkte verläuft, etwa wie in der folgenden Skizze:



Der Beweis dieser Aussage über die Interpolation beruht auf der Theorie der linearen Gleichungssysteme: Eine ganzrationale Funktion p vom Grade $< k$ läßt sich durch einen Term der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-2} x^{k-2} + a_{k-1} x^{k-1}$$

beschreiben. Gesucht sind also die k Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{k-1}$. Die k Bedingungen $p(x_i) = y_i$ stellen k *lineare* Gleichungen für die k gesuchten Größen $a_0, \ldots, a_{k-1}$ dar. Man wird so auf ein lineares Gleichungssystem mit k Gleichungen und k Unbekannten geführt.

Beispiel:

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion p mit

$$p(-2) = -15\,,\; p(2) = 1\,,\; p(3) = 10 \text{ und } p(5) = 76\,.$$

In diesem Beispiel ist die Anzahl der Bedingungen $k = 4$, die vorgeschriebenen Stellen sind $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ und $x_4 = 5$ (wie gefordert alle verschieden) und die zugehörigen Werte sind $y_1 = -15$, $y_2 = 1$, $y_3 = 10$ und $y_4 = 76$.

Setzen wir die gesuchte ganzrationale Funktion an als $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, so erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & - & 2b & + & 4c & - & 8d & = & -15 \\ a & + & 2b & + & 4c & + & 8d & = & 1 \\ a & + & 3b & + & 9c & + & 27d & = & 10 \\ a & + & 5b & + & 25c & + & 125d & = & 76 \end{array}$$

Die Matrix dieses linearen Gleichungssystems ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix hat den Rang 4, und das Gleichungssystem daher (bei jeder rechten Seite, d. h. bei beliebig vorgeschriebenen Werten y_i) genau eine Lösung. Mit dem Gaußalgorithmus berechnet man in diesem Falle $a = 1$, $b = 0$, $c = -2$ und $d = 1$. Demzufolge ist die gesuchte Funktion gegeben durch $p(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

Die Matrix des entstehenden linearen Gleichungssystems hängt nur von den Stellen x_i ab, nicht jedoch von den vorgeschriebenen Werten y_i. Im obigen Beispiel werden die Zeilen der Matrix gebildet aus der 0-ten, ersten, zweiten und dritten Potenz der Zahlen $x_1 = -2$ bzw. $x_2 = 2$ bzw. $x_3 = 3$ bzw. $x_4 = 5$. Man erkennt leicht, daß dies allgemein gilt.

Man kann nun zeigen, daß nicht nur in obigem Beispiel, sondern *in jedem Falle* die entstehende Matrix stets den *maximal möglichen* Rang hat, — wenn die x_i *alle verschieden* sind. Daraus folgt entsprechend der Theorie der linearen Gleichungssysteme, daß das Gleichungssystem (bei jeder beliebigen rechten Seite) eine eindeutige Lösung hat.

Man kann diese Aussage über die Interpolation benutzen, um eine gegebene Funktion f, von der man nur an einigen Stellen die Werte kennt, durch eine ganzrationale Funktion p zu ersetzen, die an diesen Stellen die bekannten Werte hat, aber als ganzrationale Funktion natürlich darüberhinaus auch an allen anderen Stellen berechnet werden kann.

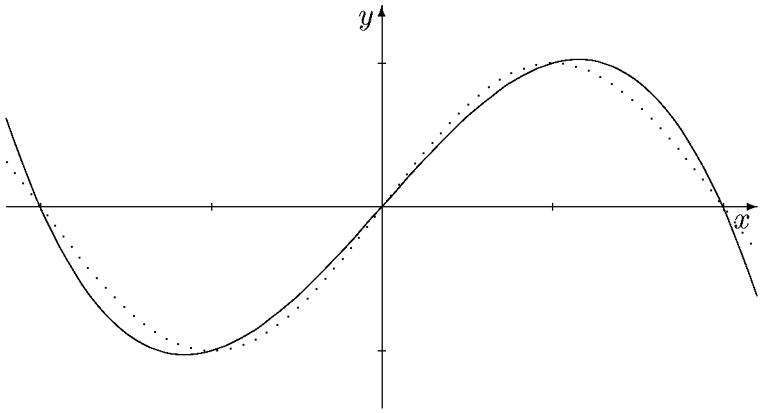
Man hofft dabei, daß die unbekannten Werte $f(x)$ und die berechenbaren Werte $p(x)$ nicht allzuweit voneinander entfernt sind, daß also f durch p *approximiert* (angenähert) wird. Dies wird um so eher der Fall sein, je mehr Funktionswerte für die Interpolation benutzt werden und je dichter das Netz der *Stützstellen* x_i ist. (Wir werden hier jedoch nicht untersuchen, inwieweit diese Hoffnung berechtigt ist. Im Gegensatz zu der Taylorapproximation, die wir anschließend behandeln wollen, ist hier keine allgemeingültige Aussage über die Abweichung zwischen gegebener Funktion f und der ganzrationalen Näherungsfunktion p möglich.)

Beispiel:
Von einer Funktion s ist bekannt, daß sie an den Stellen $0, 1, 2, 3, \ldots$ in regelmäßiger Folge die Werte $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots$ annimmt, und entsprechend auch im negativen Bereich. Nimmt man etwa die 5 ganzen Zahlen von -2 bis $+2$ als *Stützstellen* x_i, so muß man eine ganzrationale Funktion p bestimmen, die an diesen Stellen dieselben Werte wie s hat, d. h. $p(-2) = s(-2) = 0$, $p(-1) = s(-1) = -1$, $p(0) = s(0) = 0$, $p(1) = s(1) = 1$ und $p(2) = s(2) = 0$. Unser obiges Resultat besagt, daß es genau eine derartige ganzrationale Funktion vom Grade < 5, d. h. höchstens vom Grade 4, gibt.

Löst man das zugehörige lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 0 \end{array}\right) .$$

mit dem Gaußalgorithmus, so findet man die eindeutige Lösung $p(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^3$. Die folgende Skizze zeigt den Verlauf des Graphen von p im Bereich $[-2, 2]$. Die gestrichelt eingezeichnete Kurve gibt den Verlauf der Funktion s an:



2. Steigungen. Wie gefordert haben die Funktion s und die approximierende Funktion p an den Stellen -2, -1, 0, 1 und 2 dieselben Werte. Betrachtet man jedoch einmal den Schnittpunkt der beiden Graphen bei der Stelle 1 genauer, so erkennt man: s hat an dieser Stelle seinen höchsten Wert, die Werte von p dagegen steigen noch ein wenig an. Dies bedeutet, daß an der Stelle 1 die Funktion s eine waagerechte Tangente hat, p jedoch nicht.

Sind solche zusätzlichen Eigenschaften der Funktion bekannt, wie etwa die Anstiege an bestimmten Stellen, so kann man diese benutzen, um dadurch eine besser approximierende Funktion p zu finden. Etwa in diesem Fall kann man die obigen 5 Forderungen an p: $p(-2) = 0$, $p(-1) = -1$, $p(0) = 0$, $p(1) = 1$ und $p(2) = 0$ durch zwei weitere Forderungen ergänzen, die die Ableitung betreffen: $p'(-1) = p'(1) = 0$.

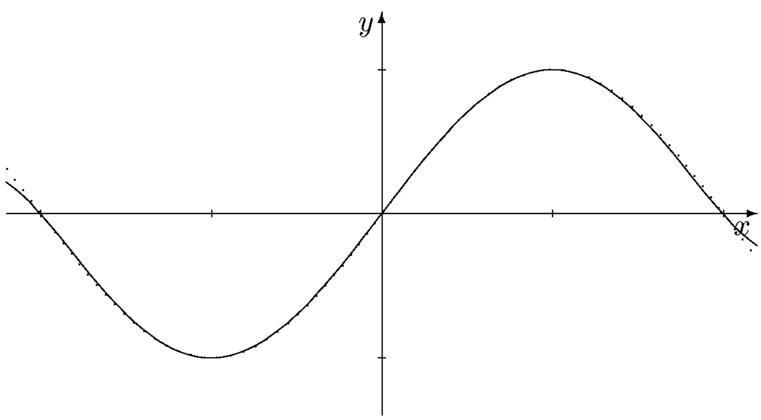
Wir erhalten so 7 lineare Gleichungen für die Koeffizienten. Es ist dann sinnvoll, den Grad der gesuchten Funktion zu erhöhen, bei 7 Gleichungen wenigstens auf einen Grad ≤ 6 (da dann 7 Koeffizienten zu bestimmen sind): $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$. Man berechnet $p'(x) = a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+6a_6x^5$ und erhält durch die Forderungen $0 = p'(-1) = a_1-2a_2+3a_3-4a_4+5a_5-6a_6$ und $0 = p'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6$ zwei weitere lineare Gleichungen für die gesuchten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_6$. Insgesamt ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit der folgenden erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 & 64 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right).$$

Dieses besitzt die eindeutige Lösung $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$, $a_1 = \frac{14}{9}$, $a_3 = -\frac{11}{18}$, $a_5 = \frac{1}{18}$. Man erhält so als approximierende ganzrationale Funktion

$$p(x) = \frac{1}{18}x^5 - \frac{11}{18}x^3 + \frac{14}{9}x\,.$$

In der folgenden Skizze ist wieder ein Bild des Graphen von p dargestellt, sowie gestrichelt der Verlauf der Ausgangsfunktion s. Ein Unterschied ist kaum erkennbar; lediglich in den Steilstücken am linken und rechten Rand kann man die gestrichelte Linie neben der durchgezogenen ahnen:



Man erkennt, daß die zusätzlichen Bedingungen an die Ableitungswerte zu einer wesentlich besser approximierenden Funktion p führen. Aber anders als bei den Überlegungen unter 1., wo nur Bedingungen an die Funktionswerte von p gestellt wurden, kann man bei Bedingungen an die Funktionswerte *und* Ableitungswerte nicht generell zeigen, daß es bei k Bedingungen immer eine eindeutige Lösung vom Grad $< k$ gibt. (Ein Gegenbeispiel (zur Übung nachrechnen): Für die Bedingungen $p(1) = 1$, $p(3) = 4$, $p'(2) = 3$ gibt es *keine* ganzrationale Lösungsfunktion *vom Grade* ≤ 2, aber *unendlich viele vom Grade 3.*)

3. Taylorpolynome. In Abschnitt 2 hatten wir für die gesuchte Funktion Funktionswerte *und* Ableitungswerte vorgeschrieben, während wir in Abschnitt 1 ausschließlich Funktionswerte vorgeschrieben hatten. Bei der Taylorapproximation geht man nun in das andere Extrem und stellt nur an einer einzigen Stelle Forderungen, jetzt aber an die höheren Ableitungen. Dafür gibt es verschiedene Gründe: Zuächst rechtfertigt der spätere Erfolg (siehe unten) diesen Ansatz. Daneben ist zu beachten, daß dadurch Funktionen behandelt werden können, bei denen man Funktionswerte nur an sehr wenigen, ja im Extremfall *nur an einer einzigen Stelle* berechnen kann (Beispiel e-Funktion e^x, siehe aber die späteren Beispiele zur Wurzelfunktion).

Beispiel: Eine wichtige Funktion c der Mathematik hat die folgenden Ableitungswerte[1] an der Stelle 0:

$$c(0) = 1\,,\ c'(0) = 0\,,\ c''(0) = -1\,.$$

Wir suchen nun eine ganzrationale Funktion p, deren Ableitungswerte damit übereinstimmen:

$$p(0) = 1\,,\ p'(0) = 0\,,\ p''(0) = -1\,.$$

Dies sind wieder 3 lineare Bedingungen an die ganzrationale Funktion p. Setzt man wie oben p als vom Grade < 3 an, so erhält man die eindeutige Lösung

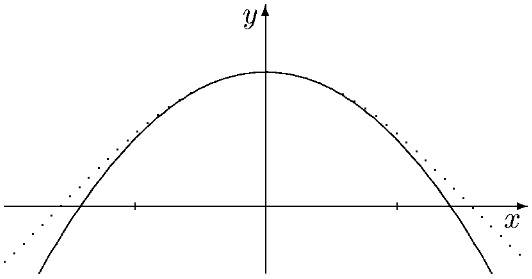
$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$

Man erkennt an der nachfolgenden linken Skizze von p_2 (gestrichelt der Verlauf von c), daß *in der Nähe der Stelle 0* p_2 eine gute Approximation für c ist.

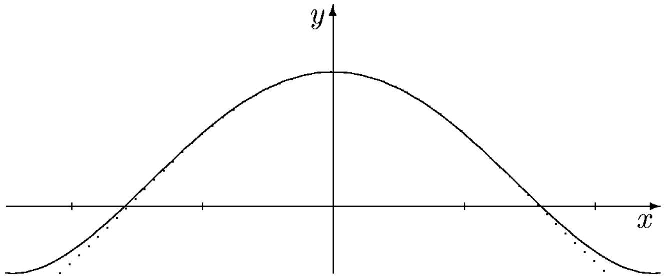
Wenn man nun sogar die Werte weiterer Ableitungen von c benutzt: $c'''(0) = 0$, $c^{(4)}(0) = 1$, so hat die folgende ganzrationale Funktion p_4 vom Grade ≤ 4 dieselben Ableitungswerte:

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\,.$$

Die rechte Skizze zeigt den Vergleich des Graphen von p_4 (durchgezogene Linie) mit dem von c (gestrichelt):



Graph von p_2



Graph von p_4

Offenbar wird die Approximation mit höherem Grad von p besser. Wir werden dies nun allgemein untersuchen:

Satz/Definition: *Ist f eine beliebig oft differenzierbare Funktion (mit 0 im Definitionsbereich) und ist n irgendeine natürliche Zahl, so gibt es genau eine ganzrationale Funktion p_n vom Grad $\leq n$, die bis zur n-ten Ableitung dieselben Ableitungswerte an der Stelle 0 hat wie f:*

$$p(0) = f(0)\,,\ p'(0) = f'(0)\,,\ p''(0) = f''(0)\,, \ldots, p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)\,.$$

[1] Die Ausgangsfunktion c verstehen wir auch als 0-te Ableitung $c^{(0)}$ und fassen daher im folgenden den Funktionswert $c(0)$ immer auch als Ableitungswert auf.

Man nennt diese ganzrationale Funktion p_n auch das n-te Taylorpolynom[2] *von f. Explizit ist $p_n(x)$ gegeben durch*

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \,,$$

wobei für eine natürliche Zahl n die Zahl $n!$ (lesen Sie: 'n Fakultät') das Produkt der Zahlen von 1 bis n bezeichnet[3]*:*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \,.$$

Auch dieses Ergebnis kann man in der Sprache der linearen Gleichungssysteme gut verstehen: Setzt man p_n als ganz-rationale Funktion vom Grad $\leq n$ an, so stellen die geforderten Approximationsbedingungen $p(0) = f(0)\,,\ p'(0) = f'(0)\,, \ldots, p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$ insgesamt $n+1$ lineare Gleichungen für die $n+1$ unbekannten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ von p dar. Die Matrix dieses linearen Gleichungssystems ist von besonders einfacher Bauart: sie ist eine sog. *Diagonalmatrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 2! & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3! & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n! \end{pmatrix} ,$$

die nur in der 'Hauptdiagonalen' von 0 verschiedene Einträge hat, und zwar gerade die Folge der Fakultäten: $0! = 1$, $1!$, $2!$, …, $n!$. Eine solche Matrix hat offenbar den maximal möglichen Rang $n+1$, das Gleichungssystem ist also für jede rechte Seite eindeutig lösbar; und die Lösung berechnet sich unmittelbar wie im Satz angegeben.

4. Beispiele. Wir wollen nun für einige Funktionen die zugehörigen Taylorpolynome berechnen.

a) $f(x) = \sqrt{1+x}$: Die Berechnung von Quadratwurzeln ist das erste über die Grundrechenarten hinausgehende Problem. Wir wollen hier die mathematischen Grundlagen dafür verstehen. Für dieses Problem würde man zunächst die Funktion $\sqrt{x}$ ins Auge fassen. Aber diese ist an der Stelle 0 gar nicht differenzierbar! Wir betrachten stattdessen die Funktion f wie sie oben angegeben ist. Sie ermöglicht natürlich auch die Berechnung der Quadratwurzeln; etwa von $\sqrt{6}$ als $f(5)$.

Wir wollen nun die Taylorpolynome zu f berechnen. Dazu bestimmen wir zunächst die Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \,, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \,, \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} \,, \\ f'''(x) &= \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}} \,, \end{aligned}$$

und deren Werte an der Stelle 0:

$$f(0) = 1\,,\ f'(0) = \frac{1}{2}\,,\ f''(0) = -\frac{1}{4}\,,\ f'''(0) = \frac{3}{8}\,.$$

Damit erhält man das dritte Taylorpolynom

$$p_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3!} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \,.$$

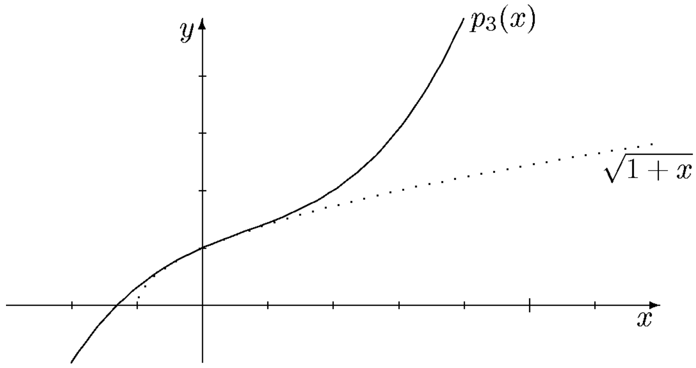
Wenn man nun aber den Wert des Taylorpolynoms $p_3(5)$ vergleicht mit $f(5) = \sqrt{6}$, erlebt man eine Enttäuschung: $p_3(5) = 8{,}1875$ kann kaum als 'Annäherung' an $f(5) = \sqrt{6}$ bezeichnet werden, da $\sqrt{6}$ ja kleiner als 3 sein muß (wegen $3^2 = 9 > 6$).

---

[2] Genauer müßten wir sagen, 'Taylorpolynom *zur Stelle 0*'. Da wir aber keine anderen Stellen betrachten werden, lassen wir diesen Zusatz weg.

[3] Es ist $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, usw. Man setzt (aus guten Gründen) $0! = 1$.

Die folgende Skizze von $\sqrt{1+x}$ und $p_3(x)$ zeigt die Diskrepanz überdeutlich:



Zugleich zeigt diese Skizze aber auch, daß *in der Nähe der Stelle 0* das Taylorpolynom anscheinend eine *gute* Approximation für $\sqrt{1+x}$ ist. Man kann also mit Hilfe des Taylorpolynoms näherungsweise die Wurzel aus solchen Zahlen ziehen, die nahe bei 1 liegen. Mit ein wenig Überlegung kann man dies benutzen, um auch unser Ausgangsproblem, nämlich $\sqrt{6}$ anzunähern, zufriedenstellend zu lösen.

Wir benutzen dazu die Rechengesetze für Wurzelterme:

$$\sqrt{6} = \sqrt{\frac{6}{a}} \cdot \sqrt{a}\,.$$

Wenn man nun $a > 0$ so wählt, daß $\frac{6}{a}$ nahe bei 1 liegt und $\sqrt{a}$ bekannt ist, so kann man auch $\sqrt{6}$ näherungsweise berechnen. Wir erreichen dies, indem wir eine *Quadratzahl nahe bei 6* wählen, etwa $6,25 = 2,5^2$. Dann erhalten wir

$$\sqrt{6} = \sqrt{\frac{6}{6,25}} \cdot \sqrt{6,25} = \sqrt{\frac{24}{25}} \cdot 2,5 = 2,5 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{25}}\,.$$

Zur näherungsweisen Berechnung der Quadratwurzel aus $\frac{24}{25} = 1 - \frac{1}{25}$ benutzen wir p_3 und erhalten

$$\sqrt{1 - \frac{1}{25}} \approx p_3(-\frac{1}{25}) = \frac{244949}{250000} \approx 0,9797959984\,.$$

Dies ergibt als Näherungswert für $\sqrt{6}$ den Wert

$$\sqrt{6} \approx 2,5 \cdot 0,9797959984 \approx 2,449489996\,.$$

(Ein Vergleich mit dem Wert des Taschenrechners $2,449489743$ zeigt eine Abweichung erst in der 7. Stelle hinter dem Komma.)

5. Die Fehlerabschätzung. Der letzte Vergleich mit dem Taschenrechner ist etwas irreführend. Wenn wir die mathematischen Grundlagen für den Taschenrechner verstehen wollen, können wir ihn nicht zugleich benutzen, um die Qualität unserer Taylorapproximation zu untermauern. Wir müssen vielmehr *unabhängig vom Taschenrechner* fundierte Aussagen über den Fehler machen, d.h. die Abweichung zwischen Taylorpolynom und der zu approximierenden Funktion abschätzen. Dies leistet der folgende Satz:

Fehlerabschätzung bei der Taylorapproximation: *Es sei f eine beliebig oft differenzierbare Funktion, $p_n(x)$ das n-te Taylorpolynom und $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ das sog. Restglied. Dieses kann man wie folgt abschätzen:*
Gilt über einem Intervall I, welches die 0 enthält, die Abschätzung

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq C$$

mit einer reellen Zahl C, so gilt über demselben I

$$|R_n(x)| \leq C \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Wir wollen dieses wichtige Resultat nun auf unser Beispiel anwenden. Wir hatten das dritte Taylorpolynom p_3 betrachtet, also $n = 3$ gesetzt. Um die obige Fehlerabschätzung benutzen zu können, müssen wir I wählen und dann C bestimmen. Da wir $\sqrt{1 - \frac{1}{25}}$ durch $p_3(-\frac{1}{25})$ angenähert haben, müssen wir $R_3(-\frac{1}{25})$ abschätzen. Wir wählen unser Intervall I also so, daß 0 und $-\frac{1}{25}$ darin liegt, also $I = [-\frac{1}{25}, 0]$.

Wir müssen nun C bestimmen. Wir suchen also den größten Wert, den der Betrag der 4. Ableitung $\left|f^{(4)}(x)\right|$ im Bereich $-\frac{1}{25} \leq x \leq 0$ annehmen kann. (Dies ist im Grunde eine Aufgabe des bekannten Typus: Man bestimme den größten/kleinsten Wert einer Funktion über einem gegebenen Definitionsbereich. Man kann hier also die bekannten Methoden der Kurvendiskussion anwenden. In diesem Fall ist dies unnötig, da die Funktion $f^{(4)}$ monoton fällt, sie also ihren größten Wert an der kleinsten Stelle x annimmt, also bei $-1/25$.)

Wir berechnen zunächst

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16} \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}} ,$$

und schätzen ab:

$$-\frac{1}{25} = -0,04 \leq x \leq 0 \Longrightarrow 0,96 \leq 1 + x \leq 1 \Longrightarrow (\sqrt{0,96})^7 \leq (1+x)^{\frac{7}{2}} \leq 1 \qquad (*)$$

Wir müssen nun, um weiter abschätzen zu können, $\sqrt{0,96}$ bestimmen, womit wir scheinbar wieder am Ausgangspunkt sind. Aber wir brauchen hier keinen exakten Wert, auch keinen Näherungswert; eine *Abschätzung* für $\sqrt{0,96}$ nach unten genügt. Diese erhalten wir etwa durch die Überlegung:

$$\sqrt{0,96} \geq \sqrt{0,81} = 0,9 .$$

Wir fahren also bei $(*)$ fort:

$$(*) \Longrightarrow 0,9^7 \leq (1+x)^{\frac{7}{2}} \leq 1 \Longrightarrow 0,47 \leq (1+x)^{\frac{7}{2}} \leq 1 \qquad (**)$$

Beim nun folgenden Übergang zu den Kehrwerten kehren sich die Ungleichungen um, und wir folgern:

$$(**) \Longrightarrow \frac{1}{0,47} \geq (1+x)^{-\frac{7}{2}} \geq 1 \Longrightarrow 2,1 \geq (1+x)^{-\frac{7}{2}} \geq 1$$

Also folgt für $-0,04 \leq x \leq 0$:

$$\left|f^{(4)}(x)\right| \leq \frac{15}{16} \cdot 2,1 \leq 2 .$$

Damit ist $C = 2$ und unsere Fehlerabschätzung lautet:

$$|R_3(x)| \leq 2 \cdot \frac{|x|^4}{4!} \quad \text{für } -0,04 \leq x \leq 0 .$$

Dies ergibt für $x = -0,04$:

$$|R_3(-0,04)| \leq 2 \cdot \frac{0,04^4}{24} \leq 2,2 \cdot 10^{-7} .$$

Der Fehler liegt also in der 7. Stelle hinter dem Komma: 6 Stellen sind exakt:

$$\sqrt{\frac{24}{25}} \approx \underline{0,979795}9984 .$$

Dies ergibt nach Multiplikation mit 2,5 für $\sqrt{6}$ einen Fehler von höchstens $2,5 \cdot 2,2 \cdot 10^{-7} \leq 5,5 \cdot 10^{-7}$:

$$\sqrt{6} \approx \underline{2,449489}996 .$$