Taylorapproximation

Taylorpolynome. Bei der Taylorapproximation sucht man ganzrationale Funktionen, die eine gegebene Funktion annähern. Als Approximationsforderung stellt man Bedingungen an die Ableitungswerte *an einer einzigen Stelle*. Dafür gibt es verschiedene Gründe: Zunächst rechtfertigt der spätere Erfolg (siehe unten) diesen Ansatz. Daneben ist zu beachten, daß dadurch Funktionen behandelt werden können, bei denen man Funktionswerte nur an sehr wenigen, ja im Extremfall *nur an einer einzigen Stelle* kennt.

Beispiel: Wir wollen Werte einer Funktion c berechnen, von der wir nur die folgenden Kenntnisse benötigen:[1)] $c(0) = 1$, $c'(0) = 0$, $c''(0) = -1$, $c'''(0) = 0$ und die weiteren Ableitungswerte an der Stelle 0 sind periodisch 1, 0, -1, 0, … . Betrachten wir einmal die Ableitungswerte[2)] bis zur zweiten Ableitung:

$$c(0) = 1\,,\ c'(0) = 0\,,\ c''(0) = -1\,.$$

Wir suchen nun eine ganzrationale Funktion p, die dieselben Ableitungswerte hat:

$$p(0) = 1\,,\ p'(0) = 0\,,\ p''(0) = -1\,.$$

Dies sind 3 lineare Bedingungen an die ganzrationale Funktion p. Setzt man daher p als ganzrationale Funktion $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ vom Grade ≤ 2 an, so erhält man die eindeutige Lösung

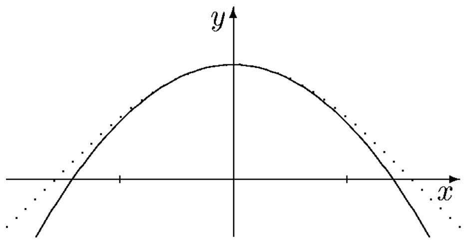
$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$

Man erkennt an der nachfolgenden linken Skizze von p_2 (gestrichelt der Verlauf von c), daß *in der Nähe der Stelle 0* p_2 eine gute Approximation für c ist.

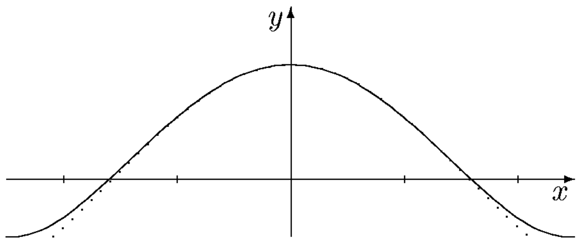
Wenn man nun sogar die Werte weiterer Ableitungen von c benutzt: $c'''(0) = 0$, $c^{(4)}(0) = 1$, so hat die folgende ganzrationale Funktion p_4 vom Grade ≤ 4 dieselben Ableitungswerte:

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\,.$$

Die rechte Skizze zeigt den Vergleich des Graphen von p_4 (durchgezogene Linie) mit dem von c (gestrichelt):



Graph von p_2



Graph von p_4

Offenbar wird die Approximation mit höherem Grad von p besser. Wir werden dies nun allgemein untersuchen:

Satz/Definition: *Ist f eine beliebig oft differenzierbare Funktion (mit 0 im Definitionsbereich) und ist n irgendeine natürliche Zahl, so gibt es genau eine ganzrationale Funktion p_n vom Grad $\leq n$, die bis zur n-ten Ableitung dieselben Ableitungswerte an der Stelle 0 hat wie f:*

$$p(0) = f(0)\,,\ p'(0) = f'(0)\,,\ p''(0) = f''(0)\,, \ldots, p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)\,.$$

[1)] Wir bezeichnen die Funktion mit c, da wir dabei an die Cosinus-Funktion denken, die diese Eigenschaften hat. Wir wollen aber deutlich machen, daß wir außer diesen Ableitungswerten *an der einen Stelle* 0 nichts weiter über diese Funktion zu wissen brauchen.

[2)] Die Ausgangsfunktion c verstehen wir auch als 0-te Ableitung $c^{(0)}$ und fassen daher im folgenden den Funktionswert $c(0)$ immer auch als Ableitungswert auf.

Man nennt diese ganzrationale Funktion p_n auch das n-te Taylorpolynom[3] *von f. Explizit ist $p_n(x)$ gegeben durch*

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\,,$$

wobei für eine natürliche Zahl n die Zahl $n!$ (lesen Sie: 'n Fakultät') das Produkt der Zahlen von 1 bis n bezeichnet[4]*:*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n\,.$$

Auch dieses Ergebnis kann man in der Sprache der linearen Gleichungssysteme gut verstehen: Setzt man p_n als ganz-rationale Funktion vom Grad $\leq n$ an, so stellen die geforderten Approximationsbedingungen $p(0) = f(0)\,,\ p'(0) = f'(0)\,, \ldots, p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$ insgesamt $n+1$ lineare Gleichungen für die $n+1$ unbekannten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ von p dar. Die Matrix dieses linearen Gleichungssystems ist von besonders einfacher Bauart: sie ist eine sog. *Diagonalmatrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 2! & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3! & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n! \end{pmatrix},$$

die nur in der 'Hauptdiagonalen' von 0 verschiedene Einträge hat, und zwar gerade die Folge der Fakultäten: $0! = 1$, $1!$, $2!$, …, $n!$. Eine solche Matrix hat offenbar den maximal möglichen Rang $n+1$, das Gleichungssystem ist also für jede rechte Seite eindeutig lösbar; und die Lösung berechnet sich unmittelbar wie im Satz angegeben.

Beispiel. Die Berechnung von Quadratwurzeln ist das erste über die Grundrechenarten hinausgehende Problem. Wir wollen hier die mathematischen Grundlagen dafür verstehen. Für dieses Problem würde man zunächst die Funktion $\sqrt{x}$ ins Auge fassen. Aber diese ist an der Stelle 0 gar nicht differenzierbar! Wir betrachten stattdessen die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$. Sie ermöglicht natürlich auch die Berechnung der Quadratwurzeln; etwa von $\sqrt{10}$ als $f(9)$, ist aber bei 0 differenzierbar.

Wir wollen nun die Taylorpolynome zu f berechnen. Dazu bestimmen wir zunächst die Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}\,, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\,, \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}}\,, \\ f'''(x) &= \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}}\,, \end{aligned}$$

und deren Werte an der Stelle 0:

$$f(0) = 1\,,\ f'(0) = \frac{1}{2}\,,\ f''(0) = -\frac{1}{4}\,,\ f'''(0) = \frac{3}{8}\,.$$

Damit erhält man das dritte Taylorpolynom

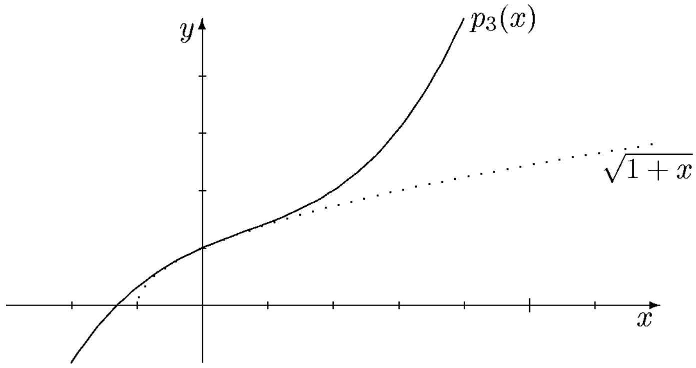
$$p_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3!} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\,.$$

Wenn man nun aber den Wert des Taylorpolynoms $p_3(9)$ vergleicht mit $f(9) = \sqrt{10}$, erlebt man eine Enttäuschung: $p_3(9) = 40,3795$ kann kaum als 'Annäherung' an $f(9) = \sqrt{10}$ bezeichnet werden.

[3] Genauer müßten wir sagen, 'Taylorpolynom *zur Stelle 0*'. Da wir aber keine anderen Stellen betrachten werden, lassen wir diesen Zusatz weg.

[4] *Es ist* $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, *usw. Man setzt (aus guten Gründen)* $0! = 1$.

Die folgende Skizze von $\sqrt{1+x}$ und $p_3(x)$ zeigt die Diskrepanz überdeutlich:



Zugleich zeigt diese Skizze aber auch, daß *in der Nähe der Stelle 0* das Taylorpolynom anscheinend eine *gute* Approximation für $\sqrt{1+x}$ ist. Man kann also mit Hilfe des Taylorpolynoms näherungsweise die Wurzel aus solchen Zahlen ziehen, die nahe bei 1 liegen. Mit ein wenig Überlegung kann man dies auch benutzen, um unser Ausgangsproblem, nämlich $\sqrt{10}$ anzunähern, zufriedenstellend zu lösen.

Wir benutzen dazu die Rechengesetze für Wurzelterme sowie die nahe bei 10 liegende Quadratzahl 9:

$$\sqrt{10} = \sqrt{9 \cdot \frac{10}{9}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{10}{9}} = 3 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9}}\,.$$

Zur näherungsweisen Berechnung der Quadratwurzel aus $1 + \frac{1}{9}$ benutzen wir $p_3(\frac{1}{9})$ und erhalten

$$\sqrt{1 + \frac{1}{9}} \approx p_3(\frac{1}{9}) = \frac{12295}{11664} \approx 1{,}054098079\,.$$

Dies ergibt als Näherungswert für $\sqrt{10}$ den Wert

$$\sqrt{10} \approx 3 \cdot \frac{12295}{11664} = \frac{12295}{3888} \approx 3{,}162294238$$

(Ein Vergleich mit dem Wert des Taschenrechners $3{,}162277660$ zeigt eine Abweichung erst in der 5. Stelle hinter dem Komma.)

Die Fehlerabschätzung. Der letzte Vergleich mit dem Taschenrechner ist etwas irreführend, denn auch der vom Taschenrechner gelieferte Wert ist nicht exakt, sondern selbst nur ein Näherungswert. Wenn wir die mathematischen Grundlagen für den Taschenrechner verstehen wollen, können wir ihn nicht zugleich benutzen, um die Qualität unserer Taylorapproximation zu untermauern. Wir müssen vielmehr *unabhängig vom Taschenrechner* fundierte Aussagen über den Fehler machen, d.h. die Abweichung zwischen Taylorpolynom und der zu approximierenden Funktion abschätzen. Dies leistet der folgende Satz:

Fehlerabschätzung bei der Taylorapproximation: *Es sei f eine beliebig oft differenzierbare Funktion, $p_n(x)$ das n-te Taylorpolynom und $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ der Fehler, das sog. Restglied. Dieses kann man wie folgt abschätzen:*
Gilt über einem Intervall I, welches die 0 enthält, die Abschätzung

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq C \quad \text{für alle } x \in I$$

mit einer reellen Zahl C, so gilt über demselben Intervall I

$$|R_n(x)| \leq C \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für alle } x \in I\,.$$

Wir wollen dieses wichtige Resultat nun auf unser Beispiel anwenden. Wir hatten das dritte Taylorpolynom $p_3(x)$ betrachtet, also $n = 3$ gesetzt. Um die obige Fehlerabschätzung benutzen zu können, müssen wir I wählen und dann C bestimmen. Da wir $\sqrt{1+\frac{1}{9}}$ durch $p_3(\frac{1}{9})$ angenähert haben, müssen

wir $R_3(\frac{1}{9})$ abschätzen. Wir wählen also unser Intervall so, daß $\frac{1}{9}$ darin liegt. Da außerdem auch 0 darin liegen muß, wählen wir $I = [0, \frac{1}{9}]$.
Wir müssen nun C bestimmen. Wir suchen also den größten Wert, den der Betrag der 4. Ableitung $\left|f^{(4)}(x)\right|$ im Bereich I annehmen kann. Dies ist eine Aufgabe des bekannten Typus: Man bestimme den größten/kleinsten Wert einer Funktion über einem gegebenen Intervall. Man kann hier also die bekannten Methoden der Kurvendiskussion anwenden.

Wir berechnen zunächst

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16} \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}},$$

In diesem Fall ist die zu untersuchende Funktion $\left|f^{(4)}(x)\right| = \dfrac{15}{16}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}^7}$. Diese ist über I monoton fallend, sie nimmt also ihren größten Wert an der kleinsten Stelle $x \in I = [0, \frac{1}{9}]$ an, d. h. bei $x = 0$. Wir erhalten so für alle $x \in I$ die Abschätzung

$$\left|f^{(4)}(x)\right| \le \left|f^{(4)}(0)\right| = \frac{15}{16} \cdot 1^{-7/2} = \frac{15}{16} \quad \text{für } x \in I = [0, \frac{1}{9}].$$

Damit ist $C = 15/16$ und unsere Fehlerabschätzung lautet:

$$|R_3(x)| \le \frac{15}{16} \cdot \frac{|x|^4}{4!} \quad \text{für } x \in [0, \frac{1}{9}].$$

Dies ergibt für $x = \frac{1}{9}$:

$$\left|R_3(\frac{1}{9})\right| \le \frac{15}{16} \cdot \frac{(1/9)^4}{4!} \le 5,9 \cdot 10^{-6}.$$

Der Fehler liegt also in der 6. Stelle hinter dem Komma; 5 Stellen sind exakt:

$$\sqrt{1+\frac{1}{9}} \approx \underline{1,054098}079.$$

Für die Berechnung von $\sqrt{10}$ erhalten wir nach Multiplikation mit 3 einen Fehler von höchstens $3 \cdot 5,9 \cdot 10^{-6} \le 1,8 \cdot 10^{-5}$, so daß 4 Stellen hinter dem Komma exakt sind:

$$\sqrt{10} = 3 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{9}} \approx \underline{3,16229}4238.$$

Beachten Sie, daß wir aufgrund des vorangehenden Satzes diese Genauigkeit *bewiesen* haben. Wir sind nicht auf den Wert des Taschenrechners zur Kontrolle angewiesen, vielmehr können *wir* nun unsererseits das Ergebnis des Taschenrechners *kontrollieren.*

Eigenschaften des Restgliedes. Grundlage der Fehlerabschätzung sind die folgenden Eigenschaften des Restgliedes. Wir fixieren n und lassen zur Vereinfachung der Schreibweise den Index n bei R_n weg. Aus $R(x) = f(x) - p_n(x)$ folgt dieselbe Beziehung für die höheren Ableitungen

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - p_n^{(k)}(x) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

und daher

$$\begin{aligned} R(0) &= f(0) - p_n(0) = 0, \\ R'(0) &= f'(0) - p_n'(0) = 0, \\ &\vdots \quad \vdots \\ R^{(n)}(0) &= f^{(n)}(0) - p_n^{(n)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Da für die ganzrationale Funktion p_n vom Grad $\le n$ die n-te Ableitung den Grad 0 hat, also konstant ist, ist die $n+1$-te Ableitung *überall* 0. Man erhält so

$$R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - p_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \quad \text{für } \textit{alle } x.$$

Gemäß der Voraussetzung des Satzes über die Restgliedabschätzung gilt daher

$$\left|R^{(n+1)}(x)\right| = \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq C \quad \text{für alle } x \in I\,.$$

Aufgabe ist es nun, aus dieser Abschätzung der $n+1$-ten Ableitung von R unter Verwendung der Ableitungswerte $R^{(k)}(0) = 0$ die behauptete Abschätzung für das Restglied $R(x)$ selbst zu folgern.

Integralabschätzung. Wir erinnern an den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: *Ist F eine Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$, so ist*

$$F(x) = \int_0^x f = \int_0^x f(t)\,dt\,,$$

denn $\int_0^x f = \int_0^x f(t)\,dt = \big[F(t)\big]_0^x = F(x) - F(0) = F(x)$.

Nun ist $R^{(n)}$ offenbar eine Stammfunktion von $R^{(n+1)} = f^{(n+1)}$, und zwar mit dem Wert 0 an der Stelle 0, also gilt

$$R^{(n)}(x) = \int_0^x R^{(n+1)} = \int_0^x f^{(n+1)} = \int_0^x f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Wegen der Abschätzung $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq C$ über dem Integrationsintervall gilt

$$\left|R^{(n)}(x)\right| = \left|\int_0^x f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leq \left|\int_0^x C dt\right| = \left|\big[Ct\big]_0^x\right| = |Cx|\ .$$

Geht man nun von dieser neuen Abschätzung $\left|R^{(n)}(t)\right| \leq |Ct|$ aus und wendet die obigen Überlegungen auf $R^{(n-1)}(x) = \int_0^x R^{(n)}(t)\,dt$ an, so erhält man

$$\left|R^{(n-1)}(x)\right| = \left|\int_0^x R^{(n)}(t)\,dt\right| \leq \left|\int_0^x Ct\,dt\right| = \left|\big[C \cdot \frac{1}{2}t^2\big]_0^x\right| = C \cdot \frac{1}{2}\,|x|^2\ .$$

Dies wiederholt man nun, erhält beim nächsten Schritt $\left|R^{(n-2)}(x)\right| \leq C \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot |x|^3$ und kommt schließlich nach insgesamt $n+1$ Schritten zur Behauptung

$$|R(x)| \leq C \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n+1}\,|x|^{n+1} = C \cdot \frac{1}{(n+1)!}\,|x|^{n+1}\ .$$

Abschließend noch die Skizzen der im Unterricht dargestellten Taylorpolynome zum Sinus: