

**Einführung in die
Differential- und Integralrechnung**

für Studierende des Köln-Kollegs
im Grundkurs des 3./4. Semesters

Unterrichtsbegleitende Skripten sowie
Übungen mit ausführlichen Lösungen

Norbert Klingen

Köln 1998

Inhalt

I. Funktionsverlauf rationaler Funktionen

§1 Ganz-rationale Funktionen und ihre Nullstellen	1
a. Ganz-rationale Funktionen	1
b. Polynomdivision	2
c. Nullstellen und Linearfaktoren	4
d. Rationale Nullstellen ganz-rationaler Funktionen	5
e. Anwendungen	6
§2 Rationale Funktionen	9
a. Polstellen und hebbare Definitionslücken	9
b. Das Verhalten im Unendlichen und Asymptoten	11

II. Differentialrechnung

§3 Die Ableitung ganzrationaler Funktionen	14
a. Sekantensteigung, Differenzenquotient, Tangente	14
b. Die Ableitung der Potenzfunktionen	16
c. Die Ableitungsfunktion	17
§4 Monotonie und Extrema	19
a. Monotonieintervalle	19
b. Extremstellen	19
§5 Höhere Ableitungen	20
a. Krümmung und Wendestellen	20
b. Vorzeichenwechsel und Ableitungen	21
c. Hinreichende Kriterien für Extrem-/Wendestellen mittels höherer Ableitungen	22
§6 Weitere Ableitungsregeln	23
a. Produkt- und Quotientenregel	23
b. Kettenregel	24
§7 Kurvendiskussion rationaler Funktionen	25

III. Integralrechnung

§8 Vom Flächeninhalt zum Integral	29
a. Grundprinzipien der Flächenberechnung	29
b. Ober- und Untersummen	29
c. Der Grenzübergang	31
§9 Das Integral	32
a. Definition und geometrische Deutung	32
b. Erste Integrationsregeln	33
c. Erste Integralberechnungen entsprechend der Definition	34
d. Weitere Berechnungen mittels geometrischer Überlegungen	35
§10 Der Hauptsatz und seine Konsequenzen	36
a. Integralfunktionen und der Hauptsatz	36
b. Stammfunktionen und die Integralformel	37
c. Integrationsregeln	38
§11 Flächen zwischen Graphen, Rotationsvolumina, Bogenlängen	39
a. Flächen zwischen Graph und x -Achse	39
b. Flächen zwischen zwei Graphen	40
c. Eingeschlossene Flächenstücke	41
d. Rotationsvolumina	41
e. Die Bogenlänge	41

I. Funktionsverlauf rationaler Funktionen

§1 Ganz-rationale Funktionen und ihre Nullstellen

a. Ganz-rationale Funktionen.

(1.1) Definition: Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen \mathbb{R} . Eine *Funktion* $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (lesen Sie: ‘ f von D in \mathbb{R} ’) ist eine Zuordnungsvorschrift, die jeder Zahl $x \in D$ eine *eindeutig* bestimmte Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Man nennt $f(x)$ (lies ‘ f von x ’) den *Funktionswert* von f an der Stelle x . D heißt *Definitionsbereich* von f , \mathbb{R} ist der *Zielbereich*. Eine häufig genutzte Möglichkeit, eine Funktion f zu definieren, ist die Angabe eines *Funktionsterms* $f(x)$, d. h. eines sinnvollen ‘Rechenausdrucks’ mit einer Variablen x . Zum Beispiel:

$$f(x) = x^3 + 4x, \quad g(x) = \frac{1}{x} + x^7, \quad h(x) = x^2 + 4, 2 \cdot x - \pi.$$

Ein solcher Term bestimmt eine Funktion durch die Vorschrift: Man setze eine reelle Zahl r in den Term ein und definiert dann das Ergebnis als Funktionswert $f(r)$ an der Stelle r . Die Funktion ist dann für alle die reellen Zahlen definiert, für die die Einsetzung in den Funktionsterm sinnvoll ist. So ist z. B. die Einsetzung $g(0)$ nicht definiert, da $\frac{1}{0}$ nicht definiert ist. Ist $f(x)$ ein Funktionsterm, so ist

$$D(f) = \{r \in \mathbb{R} \mid \text{Die Einsetzung } f(r) \text{ ist sinnvoll definiert.}\}$$

der *natürliche* oder *maximale* Definitionsbereich von f . In unseren Beispielen:

$$D(f) = D(h) = \mathbb{R}, \quad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ist f durch einen Funktionsterm $f(x)$ gegeben, so schreibt man für die Funktion f einfach $x \mapsto f(x)$ (lesen Sie: ‘ x geht über in $f(x)$ ’ oder ‘ x wird abgebildet auf $f(x)$ ’).

Anmerkung: 1) Der Funktionsbegriff in der Mathematik ist allgemeiner. Wir beschränken uns hier auf die oben definierten *reellwertigen* Funktionen, die auf Teilen der reellen Zahlengeraden definiert sind.

2) In einem Funktionsterm kann die Variable x sogar fehlen: $f(x) = 3$. Dann wird dadurch eine *konstante* Funktion definiert, die jeder reellen Zahl denselben Wert 3 zuordnet.

3) Typische, nicht durch einen einzelnen Funktionsterm beschriebene Funktionen sind die ‘abschnittsweise’ definierten Funktionen, wie etwa die *Betragsfunktion*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

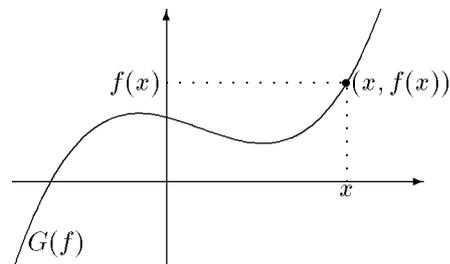
oder auch kompliziertere Konstruktionen wie z. B. die Funktion f gegeben durch $x \mapsto f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{falls } -1 \leq x \leq 1, \\ 3x & \text{falls } x > 1, \\ -3x & \text{falls } x < -1. \end{cases}$$

Um sich eine Vorstellung von einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zu machen, stellt man sie durch ihren *Graphen* $G(f)$ in einem Koordinatenkreuz dar:

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in D, y = f(x)\}.$$

Für jede reelle Zahl x im Definitionsbereich markiert man (siehe nebenstehende Skizze) im Koordinatenkreuz den Punkt $(x, f(x))$, dessen x -Koordinate x und dessen y -Koordinate der zugehörige Funktionswert $f(x)$ ist. Die Menge aller dieser Punkte in der x - y -Ebene ist der Graph von f .



Im Folgenden wollen wir uns zunächst mit der wichtigen Funktionsklasse der *ganz-rationalen* Funktionen auseinandersetzen:

(1.2) Definition: a) Eine *ganz-rationale* Funktion ist eine Funktion f , die durch einen Funktionsterm der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

beschrieben werden kann. (Einen solchen Term nennt man auch *Polynom*.) Dabei ist $n \in \mathbb{N}_0$ und die *Koeffizienten* $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ sind beliebige reelle Zahlen.

b) Ist $a_n \neq 0$, so nennt man n den *Grad* von f und a_n den *führenden Koeffizienten* des Terms. Eine ganz-rationale Funktion vom Grad 0 ist also konstant: $f(x) = a_0$.

c) Sind alle Koeffizienten 0, also $f(x) = 0$, so spricht man von der *Nullfunktion*. Für diese ist der Grad nicht definiert.

d) Der maximale Definitionsbereich einer ganz-rationale Funktion ist offensichtlich der ganze Zahlenstrahl \mathbb{R} .

b. Polynomdivision. Bitte beachten Sie, daß eine ganz-rationale Funktion auch durch einen formal anders gestalteten Funktionsterm gegeben sein kann. So ist etwa durch den Funktionsterm

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

eine ganz-rationale Funktion f gegeben, da man diesen Term durch ‘Ausmultiplizieren’ auf die in (1.2) geforderte Form bringen kann. (Geben Sie für dieses Beispiel den Grad n und die Koeffizienten a_0, \dots, a_n an.)

Die nicht ausmultiplizierte, *faktorierte* Form des Funktionsterms hat aber den großen Vorteil, daß man aus ihr unmittelbar die Nullstellen der Funktion f ablesen kann. Da ein Produkt nur dann 0 sein kann, wenn einer der Faktoren 0 ist, gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0 \\ &\iff x - 1 = 0 \vee x + 2 = 0 \vee x - 3 = 0 \\ &\iff x = 1 \vee x = -2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Ist also eine ganzrationale Funktion f nicht in dieser Form gegeben, sondern etwa in der Standardform

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

so muß man versuchen, den Funktionsterm in die Form

$$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad (*)$$

zu bringen. Man versucht also, $f(x)$ in Linearfaktoren zu zerlegen. Das entscheidende Hilfsmittel dabei ist die

Polynomdivision: Wir gehen aus von zwei Polynomtermen, z. B.

$$f(x) = 3x^5 + 4x^4 - x^2 + 3x - 1 \quad \text{und} \quad g(x) = x^2 + 2x - 3,$$

die wir jeweils nach fallenden x -Potenzen sortieren. Wir wollen versuchen, $f(x)$ durch $g(x)$ zu dividieren, und gehen dabei ähnlich vor wie bei der schriftlichen Division mehrstelliger natürlicher Zahlen. Wir beachten zunächst nur die jeweiligen Summanden mit den höchsten x -Potenzen in $f(x)$ bzw. $g(x)$ und dividieren diese:

$$3x^5 : x^2 = 3x^3.$$

Dann multiplizieren wir den Divisor $g(x)$ mit $3x^3$ und subtrahieren dies vom Dividenten $f(x)$:

$$\begin{array}{r} (3x^5 + 4x^4 - x^2 + 3x - 1) : (x^2 + 2x - 3) = 3x^3 + \dots \\ -(3x^5 + 6x^4 - 9x^3) \\ \hline -2x^4 + 9x^3 - x^2 + 3x - 1 \end{array}$$

Mit dem entstehenden Restpolynom (wir nennen es $f_1(x)$)

$$f_1(x) = f(x) - 3x^3 \cdot g(x) = -2x^4 + 9x^3 - x^2 + 3x - 1$$

arbeitet man nun an Stelle von $f(x)$ weiter: Wieder dividiert man den führenden Term (jetzt $-2x^4$) durch den führenden Term x^2 von $g(x)$ und erhält als Ergebnis $-2x^2$. Damit multipliziert man den Divisor $g(x)$ und subtrahiert das Produkt von $f_1(x)$:

$$\begin{array}{r} (3x^5 + 4x^4 - x^2 + 3x - 1) : (x^2 + 2x - 3) = 3x^3 - 2x^2 + \dots \\ -(3x^5 + 6x^4 - 9x^3) \\ \hline -2x^4 + 9x^3 - x^2 + 3x - 1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 6x^2) \\ \hline 13x^3 - 7x^2 + 3x - 1 \end{array}$$

So entsteht das nächste Polynom

$$f_2(x) = f_1(x) - (-2x^2) \cdot g(x) = f(x) - (3x^3 - 2x^2) \cdot g(x) = 13x^3 - 7x^2 + 3x - 1.$$

Man verfährt nun weiter wie oben beschrieben bis

$$\begin{array}{r} (3x^5 + 4x^4 \quad -x^2 \quad +3x \quad -1) : (x^2 + 2x - 3) = 3x^3 - 2x^2 + 13x - 33 + \dots \\ -(3x^5 + 6x^4 - 9x^3) \\ \hline \quad -2x^4 + 9x^3 \quad -x^2 \quad +3x \quad -1 \\ -(-2x^4 - 4x^3 + 6x^2) \\ \hline \quad \quad 13x^3 - 7x^2 + 3x - 1 \\ -(13x^3 + 26x^2 - 39x) \\ \hline \quad \quad \quad -33x^2 + 42x - 1 \\ -(-33x^2 - 66x + 99) \\ \hline \quad \quad \quad \quad 108x - 100 \end{array}$$

An dieser Stelle kann man das Verfahren nicht mehr weiterführen, da das *Restpolynom*

$$r(x) = 108x - 100$$

als höchste x -Potenz nur x^1 enthält, die nicht mehr durch x^2 teilbar ist:

- Der Grad des Restpolynoms $r(x)$ ist *kleiner* als der Grad des Divisors $g(x)$.

Dieses 'Restpolynom' $r(x)$ ist entstanden, indem wir sukzessive gewisse Vielfache des Divisors $g(x)$ von $f(x)$ subtrahiert haben, nämlich

$$r(x) = f(x) - (3x^3 - 2x^2 + 13x - 33) \cdot g(x),$$

wobei der Faktor vor $g(x)$ (wir wollen ihn $q(x)$ nennen)

$$q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 13x - 33$$

der bei der obigen Rechnung gefundene 'Quotient' ist. Unsere Polynomdivision hat also zu den beiden Polynomtermen $f(x)$ und $g(x)$ zwei Polynomterme $q(x)$ und $r(x)$ geliefert mit den folgenden beiden Eigenschaften:

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x) \quad (*)$$

und

$$\text{Grad von } r(x) < \text{Grad von } g(x). \quad (**)$$

Dieses Verfahren der Polynomdivision mit Rest ist allgemein anwendbar. Zwar war in obigem Beispiel der Polynomterm $g(x)$ 'normiert', d. h. der führende Koeffizient von $g(x)$ war 1. Dies hat die Rechnung erleichtert (es traten keine Brüche auf), aber das Verfahren ist auch anwendbar, wenn etwa der führende Term in $g(x)$ die Form $2x^2$ o. ä. gehabt hätte. Man hätte dann immer durch diesen Term (einschließlich des Koeffizienten) dividieren müssen. Das Verfahren ist also auf alle Polynomterme $g(x)$ der allgemeinen Form

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit $a_n \neq 0$ anwendbar. Damit ist für $g(x)$ lediglich das Nullpolynom '0' ausgeschlossen. Wir fassen nun die Überlegungen zusammen in dem folgenden

(1.3) Satz: (Polynomdivision) *Zu je zwei Polynomtermen $f(x)$ und $g(x)$, $g(x)$ sei nicht der Term '0', gibt es Polynome $q(x)$ und $r(x)$ mit den Eigenschaften*

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x) \quad (*)$$

und

$$r(x) \text{ ist der Term } 0 \text{ oder Grad von } r(x) < \text{Grad von } g(x). \quad (**)$$

Man berechnet diese Polynome $q(x)$ und $r(x)$ mit Hilfe des oben beschriebenen Verfahrens.

[Es sei angemerkt, daß die Polynome $q(x)$ und $r(x)$ durch die beiden Forderungen (*) und (**) *eindeutig* bestimmt sind.]

c. Nullstellen und Linearfaktoren. Die Polynomdivision ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung von Nullstellen. Wir beweisen damit zunächst den folgenden Zusammenhang zwischen Nullstellen und Linearfaktoren:

(1.4) Satz: Gegeben sei eine ganzrationale Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x)$. Ist a eine Nullstelle von f , d. h. $f(a) = 0$, so kann man aus dem Polynomterm $f(x)$ den Linearfaktor $(x - a)$ multiplikativ abspalten. Präziser: Es gibt einen Polynomterm $q(x)$ mit

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x).$$

Zum Beweis dieses Satzes und zur Berechnung von $q(x)$ dividiert man $f(x)$ durch $(x - a)$ gemäß (1.3). Dies ergibt

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x),$$

wobei das Restpolynom $r(x)$ entweder 0 ist oder einen Grad < 1 (=Grad von $(x - a)$), also den Grad 0 hat. Folglich ist $r(x)$ eine Konstante c und damit

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + c.$$

Setzt man nun in diese Termgleichung a ein, so folgt

$$f(a) = 0 \cdot q(a) + c = c.$$

Ist also a eine Nullstelle von f , d. h. $f(a) = 0$, so ist die Konstante c gleich 0 und es folgt wie behauptet

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x).$$

Hat man eine ganz-rationale Funktion f in dieser Weise zerlegt, so ist durch $q(x)$ wieder eine ganz-rationale Funktion gegeben, deren Grad um 1 kleiner ist als der von f . Ist nun a zufällig auch Nullstelle von h , so kann man wieder gemäß (1.4) den Linearfaktor $(x - a)$ abspalten. Wiederholt man dies solange wie möglich, so erhält man schließlich

$$f(x) = (x - a)^k \cdot g(x) \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}, g(a) \neq 0. \quad (+)$$

Diese Zerlegung ist eindeutig; k gibt an, wie oft man den Linearfaktor $(x - a)$ aus dem Term $f(x)$ abspalten kann. Man nennt k die Ordnung der Nullstelle a von f :

(1.5) Definition: Ist a Nullstelle einer ganz-rationale Funktion f , so nennt man die Zahl k in (+) die *Ordnung* oder *Vielfachheit* der Nullstelle a von f .

Ist eine Zerlegung der Form (+) gegeben, so ist der Grad der ganz-rationale Funktion g um k kleiner als der von f . Außerdem sind die Nullstellen von f gerade gegeben durch a und alle Nullstellen von g . Damit ist die Nullstellenberechnung von f auf die von g zurückgeführt, und wegen des geringeren Grades von g im Prinzip vereinfacht. Nun kann man die Abspaltung von Nullstellen für das Polynom $g(x)$ statt $f(x)$ erneut durchführen. Dies kann man solange wiederholen, bis das entstandene Polynom $g(x)$ überhaupt keine Nullstellen mehr hat:

(1.6) Satz: a) Hat eine ganz-rationale Funktion f vom Grade n die verschiedenen Nullstellen x_1, x_2, \dots, x_m mit den Ordnungen k_1, \dots, k_m , so kann der Funktionsterm $f(x)$ dargestellt werden als

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_m)^{k_m} \cdot g(x),$$

wobei $g(x)$ eine ganz-rationale Funktion g beschreibt, die bei x_1, \dots, x_m keine Nullstelle mehr hat. g hat den Grad $n - (k_1 + \dots + k_m)$.

b) Hat g überhaupt keine Nullstellen mehr auf \mathbb{R} , so sind x_1, \dots, x_m sämtliche Nullstellen von f — und umgekehrt.

c) Es folgt insbesondere: Eine ganz-rationale Funktion f vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen. Genauer gilt: Die Summe der Ordnungen ihrer Nullstellen ist höchstens n .

Nullstellenfreie ganz-rationale Funktionen sind z. B. die konstanten Funktionen: $g(x) = c$, $c \neq 0$, aber auch Funktionen höheren Grades können nullstellenfrei sein, etwa $g(x) = x^2 + 1$ o. ä. Ist $g(x) = c$ konstant, so erhält man für f eine Beschreibung des Funktionsterms in der Gestalt

$$f(x) = c \cdot (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_m)^{k_m}$$

mit den verschiedenen Nullstellen x_1, x_2, \dots, x_m . Dabei ist der Faktor c offensichtlich gerade der führende Koeffizient a_n von $f(x)$.

d. Rationale Nullstellen ganz-rationaler Funktionen. Die bisherigen Überlegungen hängen entscheidend davon ab, daß man zu gegebenem Polynomterm $f(x)$ eine Nullstelle *findet*. Nun kennen Sie für *quadratische* Polynomterme $x^2 + px + q$ ein *Verfahren* zur Berechnung der Nullstellen, die sog. p, q -Formel. Für Polynomterme höheren Grades gibt es eine solche Auflösungsformel i. a. *nicht*. Genauer gilt: Für Grad 3 und 4 gibt es zwar (komplizierte) Auflösungsformeln, ist jedoch der Grad ≥ 5 , so gibt es *nachweislich* keine allgemeingültigen Auflösungsformeln.

Beschränkt man sich jedoch auf ganz-rationale Funktionen, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind — wie dies in unserem Unterricht meist der Fall sein wird —, so kann man zumindest *die* Nullstellen bestimmen, die *rationale* Zahlen sind. Sind die Koeffizienten a_i in dem Polynomterm

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

rationale Zahlen, so kann man durch Multiplikation mit dem Hauptnenner die Koeffizienten ganzzahlig machen, ohne daß sich dabei die Nullstellen ändern. Wir werden also im folgenden nur Polynomterme mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ betrachten! Dann gilt der folgende

(1.7) Satz: (Rationale Nullstellen ganz-rationaler Funktionen) *Gegeben sei ein Polynomterm*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ (!). Es sei $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ eine rationale Nullstelle von f mit zueinander teilerfremden Zähler $c \in \mathbb{Z}$ und Nenner $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$f\left(\frac{c}{d}\right) = 0 \implies c \text{ teilt } a_0 \quad \text{und} \quad d \text{ teilt } a_n.$$

Als rationale Nullstellen von f kommen also nur Zahlen in Frage, deren Zähler ein Teiler von a_0 und deren Nenner ein Teiler von a_n ist! Diese kann man bestimmen und dann durch Einsetzen feststellen, welche davon Nullstellen sind. Hat man eine Nullstelle gefunden, so spaltet man den entsprechenden Linearfaktor aus $f(x)$ ab und arbeitet mit dem verbleibenden Polynomterm kleineren Grades weiter.

Als Spezialfälle seien erwähnt:

- 1) Als ganzzahlige Nullstellen c (Nenner $d = 1!$) kommen nur Teiler von a_0 in Frage!
- 2) Ist $a_n = 1$, so muß der Nenner $d = 1$ sein; mögliche rationale Nullstellen c/d sind also notwendig ganzzahlig.

Zum *Beweis* von (1.7): Es sei — wie angegeben — $0 = f\left(\frac{c}{d}\right)$, also

$$0 = a_n \frac{c^n}{d^n} + a_{n-1} \frac{c^{n-1}}{d^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{c}{d} + a_0.$$

Nach Multiplikation mit d^n erhält man:

$$0 = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} d + a_{n-2} c^{n-2} d^2 + \dots + a_1 c d^{n-1} + a_0 d^n. \quad (*)$$

Löst man dies nach $a_0 d^n$ auf, so erhält man:

$$\begin{aligned} a_0 d^n &= -a_n c^n - a_{n-1} c^{n-1} d - \dots - a_1 c d^{n-1} \\ &= c \cdot (-a_n c^{n-1} - a_{n-1} c^{n-2} d - \dots - a_1 d^{n-1}). \end{aligned}$$

Da der Ausdruck in Klammern eine ganze Zahl ist (die Koeffizienten a_i liegen in \mathbb{Z} (!) und c, d ebenfalls), ist c ein Teiler von $a_0 d^n$ ist. Da c und d aber teilerfremd sind, muß c ein Teiler von a_0 sein.

Löst man nun (*) nach $a_n c^n$ auf, so erhält man entsprechend aus

$$a_n c^n = d(-a_{n-1} c^{n-1} - a_{n-2} c^{n-2} d - \dots - a_1 c d^{n-2} - a_0 d^{n-1}),$$

daß d ein Teiler von $a_n c^n$ sein muß. Wie oben folgt wieder: d ist Teiler von a_n . Damit ist Satz (1.7) bewiesen.

e. Anwendungen.

A) Zerlegung in Linearfaktoren

Gegeben sei ein Polynomterm $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Gesucht sind alle Nullstellen und damit verbunden eine Zerlegung des Terms $f(x)$ in Linearfaktoren.

- 1) Man überprüft zunächst, ob man den Term faktorisieren kann, etwa durch Ausklammern oder binomische Formeln. In dem Falle untersucht man die gefundenen Faktoren getrennt wie nachfolgend beschrieben.
- 2) Für quadratische Gleichungen wende man die p, q -Formel oder quadratische Ergänzung zur Berechnung aller Nullstellen an.
- 3) Für Gleichungen höheren Grades stelle man zunächst fest, ob evtl. alle im Term $f(x)$ auftretenden *Exponenten* von x Vielfache einer festen Zahl $k \geq 2$ sind, wie etwa in $x^6 + 2x^3 + 5 = 0$ ($k = 3$) oder $3x^6 - 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ ($k = 2$). Dann reduziert man den Grad der zu untersuchenden Polynomgleichung durch *Substitution*: Man ersetzt x^k durch eine neue Variable z und erhält so eine Gleichung niederen Grades in der neuen Variablen z ($z^2 + 2z + 5 = 0$ im ersten und $3z^3 - 2z^2 - 3z + 1 = 0$ im zweiten Fall). Auf diese wende man wieder die hier beschriebenen Schritte 1) – 7) an. Am Schluß muß man dann noch für jede gefundene Lösung z der reduzierten Gleichung die Gleichung $x^k = z$ (durch Wurzelziehen) lösen.
- 4) Wenn keine weitere Substitution möglich ist, oder wenn die Gleichung ‘in z ’ nicht unmittelbar gelöst werden kann, wendet man die nachfolgenden Schritte an:
- 5) Man suche eine *rationale* Nullstelle a unter Beachtung von Satz (1.7).
- 6) Man spalte den zugehörigen Linearfaktor $x - a$ gemäß Satz (1.4) ab.
- 7) Mit dem verbleibenden Faktor $q(x)$ wiederhole man die Schritte 1) – 6) solange wie möglich.
- 8) Das hier skizzierte Verfahren bricht ab, wenn
 - a) alle Nullstellen gefunden sind (!), oder
 - b) eine Gleichung mindestens dritten Grades vorliegt, die
 - 1) nicht durch Substitution vereinfacht werden kann und
 - 2) keine *rationale* Nullstelle mehr hat.

B) Nullstellenordnung und Vorzeichenwechsel

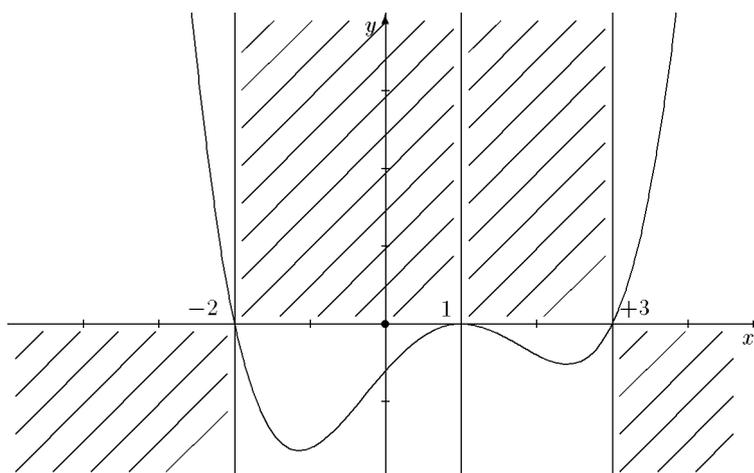
Gelingt bei diesem Verfahren eine Bestimmung *aller* Nullstellen der ganzrationalen Funktion und damit eine *faktorierte* Form des Funktionsterms $f(x)$ wie in Satz (1.6), so kann man daraus nicht nur unmittelbar die Nullstellen der Funktion f ablesen, sondern auch die Vorzeichenverteilung für die Funktionswerte $f(x)$. Gehen wir einmal von folgendem Beispiel

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 2)(x - 3). \quad (*)$$

aus. Die Nullstellen von f sind offensichtlich $+1$ (von 2. Ordnung) und $-2, +3$ jeweils von erster Ordnung. Das Vorzeichen von $f(x)$ wird nun durch das Vorzeichen der einzelnen Linearfaktoren bestimmt: Ist eine *gerade* Anzahl von Linearfaktoren negativ, so ist das Produkt (und damit der Funktionswert $f(x)$) positiv; ist eine *ungerade* Anzahl von Linearfaktoren negativ, so ist auch der Funktionswert $f(x)$ negativ. Nun ist aber das Vorzeichen eines einzelnen Linearfaktors $x - a$ für verschiedene Werte von x leicht abzulesen:

$$x - a \begin{cases} > 0 & \text{für } x > a, \\ < 0 & \text{für } x < a. \end{cases}$$

So sind für reelle Zahlen x größer als alle auftretenden Nullstellen, d. h. für $x > 3$, alle Linearfaktoren in (*) positiv ($x + 2 > 5$, $x - 1 > 2$, $x - 3 > 0$), das Produkt also auch. Liegt x zwischen der zweiten und dritten Nullstelle, also $1 < x < 3$, so ist nur der letzte Linearfaktor $x - 3$ negativ, alle anderen sind positiv, also das Produkt $f(x)$ negativ. Genauso untersucht man die anderen Bereiche zwischen den Nullstellen. Auf diese Art und Weise erhält man einen ersten groben Überblick über den Verlauf der Funktion f und kann eine vorläufige Skizze des Graphen entwerfen. Der in der nachfolgenden Skizze angedeutete Graph ist ein *denkbarer* Verlauf, er kann in den Einzelheiten durchaus anders aussehen (siehe die spätere Diskussion in Kapitel II). Durch die obigen Überlegungen sind jedoch gewisse Bereiche der Koordinatenebene bestimmt, in denen der Graph *mit Sicherheit nicht* verlaufen kann. Diese sind in der nachfolgenden Skizze schraffiert.



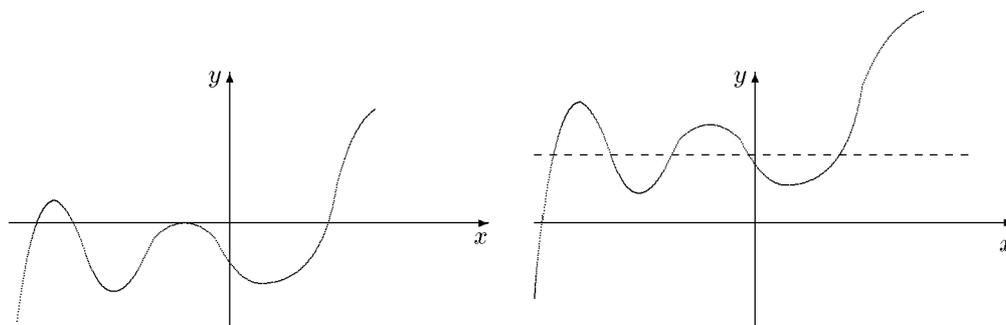
Wir wollen an diesem Beispiel auch das wichtige Phänomen des *Vorzeichenwechsels* studieren. Die Funktionswerte $f(x)$ ändern offenbar bei den Nullstellen $x = -2$ und $x = +3$ ihr Vorzeichen, bei $+1$ hingegen nicht. Betrachten wir einmal die Stelle $+3$: Hier ändert der Linearfaktor $x - 3$ sein Vorzeichen, für $x < 3$ hat er negative Werte und für $x > 3$ positive. Da die anderen Linearfaktoren bei $+3$ ihr Vorzeichen nicht ändern, ergibt sich insgesamt ein Vorzeichenwechsel für $f(x)$. Anders bei $+1$: Hier ändert zwar der Linearfaktor $x - 1$ ebenfalls sein Vorzeichen, sein Quadrat $(x - 1)^2$ aber natürlich nicht. Es ergibt sich also kein Vorzeichenwechsel für $f(x)$. Wir erkennen also einen Zusammenhang zwischen Vorzeichenwechsel und der Häufigkeit, mit der ein Linearfaktor in der Zerlegung von $f(x)$ vorkommt. Ein Vorzeichenwechsel liegt dann vor, wenn der Linearfaktor *ungerade* oft vorkommt. Kommt er jedoch in gerader Anzahl vor, so kann sich das Vorzeichen nicht ändern. Diese Häufigkeit eines Linearfaktors in der Zerlegung von $f(x)$ ist nun nichts anderes als die Ordnung der entsprechenden Nullstelle. Wir halten fest:

(1.8) Satz: Eine ganz-rationale Funktion f hat genau dort einen Vorzeichenwechsel, wo sie eine Nullstelle ungerader Ordnung hat.

Wir haben uns dieses Ergebnis klar gemacht für ganz-rationale Funktionen, deren Funktionsterm $f(x)$ sich *vollständig* in Linearfaktoren zerlegen läßt. Der Satz gilt aber in der formulierten Allgemeinheit: Wir zerlegen $f(x)$ in der Form $f(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$, wobei k die Nullstellenordnung von f an der Stelle a sei; das heißt, aus $g(x)$ läßt sich nicht noch einmal der Linearfaktor $x - a$ abspalten, und dies ist der Fall, wenn $g(a) \neq 0$ ist. Der Wert $g(a)$ ist also positiv oder negativ. Wenn er positiv ist: $g(a) > 0$, so bleiben die Werte der ganzrationalen Funktion g auch 'in der Nähe' von a positiv¹⁾. Entsprechend bei negativem $g(a)$. Ob also f bei a einen Vorzeichenwechsel hat, liegt ausschließlich am Verhalten von $(x - a)^k$, und damit daran, ob k ungerade oder gerade ist.

C) Aus der Gestalt des Graphen den Grad ablesen

Ist der Graph einer ganz-rationale Funktion gegeben, so kann man aus der Zahl der Nullstellen entnehmen, wie groß der Grad mindestens sein muß. In dem nachfolgend links skizzierten Beispiel hat die Funktion f vier Nullstellen, von denen mindestens eine doppelt ist, da dort kein Vorzeichenwechsel vorliegt. Also muß (wieder nach Satz (1.6)) f mindestens den Grad $1+1+1+2=5$ haben.



Diese Überlegungen kann man auch auf den rechten Graphen anwenden, der nur eine Nullstelle

¹⁾ Dies beruht darauf, daß der Graph ganz-rationaler Funktionen keine Lücken aufweist. Dies charakterisiert die sog. *stetigen* Funktionen.

hat. Verschiebt man den Graphen geeignet in y -Richtung, so erhält man 5 Nullstellen. Bei einer solchen Verschiebung verändert sich lediglich das absolute Glied a_0 des Funktionsterms, aber nicht der Grad. Man kann nun die obigen Überlegungen auf den verschobenen Graphen anwenden und so feststellen, daß der Grad mindestens 5 sein muß.

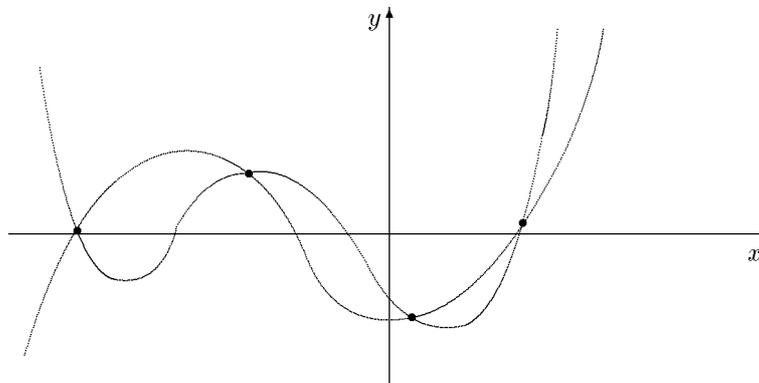
D) Gleichungen der Form $g(x) = h(x)$

Eine Gleichung $g(x) = h(x)$ ist natürlich äquivalent zu $g(x) - h(x) = 0$. Sind $g(x)$ und $h(x)$ Polynomterme, so ist auch $f(x) = g(x) - h(x)$ ein Polynomterm, dessen Nullstellen man nach A) bestimmen kann.

Beispiel: $x^3 + 119x = 19x^2 + 245$ führt auf die Nullstellenbestimmung von $f(x) = x^3 - 19x^2 + 119x - 245$. Das in A) skizzierte Vorgehen führt zu $f(x) = (x-7)^2(x-5)$. 5 und 7 sind also die einzigen Nullstellen von f , so daß die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung $x^3 + 119x = 19x^2 + 245$ gerade $\mathbb{L} = \{5, 7\}$ ist.

E) Schnittpunkte der Graphen ganz-rationaler Funktionen

Gegeben seien zwei verschiedene ganz-rationale Funktionen g und h vom Grade n bzw. m . Die Schnittpunkte ihrer Graphen $G(g)$ und $G(h)$ sind die Punkte (x, y) mit $y = g(x) = h(x)$. Um diese zu bestimmen, muß man also eine Gleichung vom Typ D) lösen. Dies führt auf die Polynomgleichung $g(x) - h(x) = 0$, deren Grad höchstens so groß ist, wie die größere der beiden Zahlen n und m . Es gibt also höchstens so viele Lösungen, und damit Schnittpunkte, wie der größere der beiden Grade von g und h angibt! Die folgende Skizze zeigt ein Beispiel mit den Graphen zweier ganz-rationaler Funktionen vom Grade 3 bzw. 4:

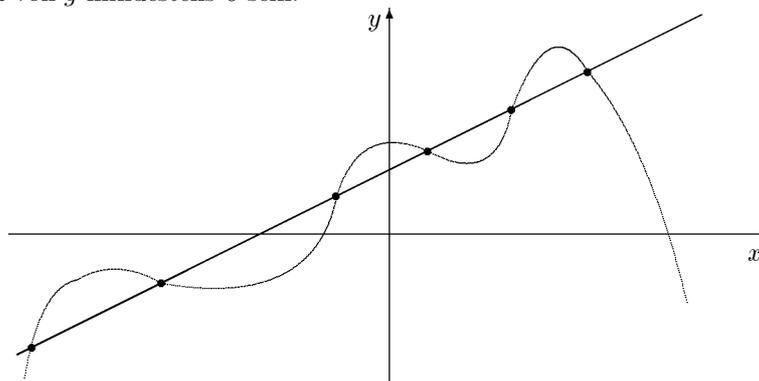


Betrachten wir nun einmal den Spezialfall, daß $m \leq 1$, d. h. h linear ($h(x) = ax + b$) ist. Der Graph $G(h)$ ist dann eine Gerade. Umgekehrt sind alle Geraden, die nicht parallel zur y -Achse verlaufen, Graph $G(h)$ einer geeigneten linearen Funktion. Wir erhalten so aus obigen Überlegungen:

Schneidet eine beliebige Gerade den Graphen einer ganz-rationalen Funktion g in $r \geq 2$ Punkten, so muß g mindestens den Grad r haben.

[Bei dieser Formulierung sind die Parallelen zur y -Achse ausgeschlossen, da sie einen Funktionsgraphen nur in einem Punkt schneiden können (Funktionsbegriff!).] Dieses Kriterium verallgemeinert unsere Überlegungen aus C): Dort hatten wir gesehen, daß der Grad mindestens so groß ist wie die Zahl der Nullstellen. Die Zahl der Nullstellen ist aber nichts anderes als die Anzahl der Schnittpunkte des Graphen der Funktion mit der x -Achse. In dem jetzt formulierten Kriterium kann man nun statt der x -Achse *jede beliebige Gerade* betrachten, die den Graphen in mindestens 2 Punkten schneidet: Die Anzahl der Schnittpunkte gibt dann die Mindestgröße des Grades an.

In dem folgenden Beispiel ist eine Gerade eingezeichnet, die den Graphen $G(g)$ in 6 Punkten schneidet. Also muß der Grad von g mindestens 6 sein.



§2 Rationale Funktionen

a. Polstellen und hebbare Definitionslücken. In diesem Paragraphen wollen wir nun über die bisherige Funktionsklasse der ganz-rationalen Funktionen hinausgehen und die umfassendere Klasse der *rationalen Funktionen* kennenlernen und genauer studieren. So wie man die rationalen Zahlen definiert hat als die Quotienten ganzer Zahlen (mit von 0 verschiedenem Nenner), so definieren wir nun:

(2.1) Definition: Eine *rationale Funktion* f ist der Quotient zweier ganz-rationaler Funktionen, wobei die Nennerfunktion nicht die Nullfunktion ist:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Dabei sind $g(x)$ und $h(x)$ Funktionsterme beliebiger ganz-rationaler Funktionen, für $h(x)$ ist lediglich der Term '0' ausgeschlossen.

Anmerkungen:

- 1) Unsere bisherigen ganz-rationalen Funktionen sind natürlich auch rationale Funktionen im Sinne dieser Definition, da man als Nenner die konstante Funktion h vom Wert 1 ($h(x) = 1$) wählen kann.
- 2) Rationale Funktionen, die nicht ganz-rational sind, nennt man *gebrochen rational*.
- 3) Anders als die ganz-rationalen Funktionen sind rationale Funktionen im allgemeinen nicht auf ganz \mathbb{R} definiert, sie haben *Definitionslücken*. Diese sind gegeben durch die Nullstellen des Nenners $h(x)$: An Stellen $a \in \mathbb{R}$ mit $h(a) = 0$ ist $f(a) = \frac{g(a)}{h(a)}$ *nicht definiert*, die Funktion f besitzt dort eine Definitionslücke. Der Definitionsbereich einer rationalen Funktion f mit Nennerterm $h(x)$ besteht also aus allen reellen Zahlen mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners:

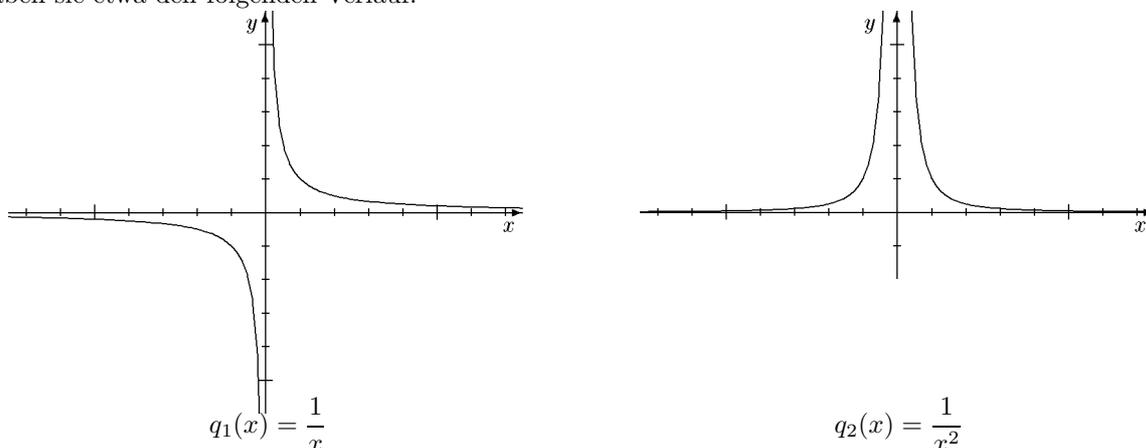
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{a \in \mathbb{R} \mid h(a) = 0\}.$$

f besitzt also nur endlich viele Definitionslücken; ihre Anzahl ist höchstens so groß wie der Grad des Nenners $h(x)$.

Wir wollen uns nun dieses neue Phänomen der Definitionslücken einmal genauer ansehen, indem wir einige Beispiele betrachten. Zunächst einmal die einfachsten gebrochen-rationalen Funktionen

$$q_1(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad q_2(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Beide Funktionen sind offenbar rational mit der einzigen Definitionslücke bei 0. In der Nähe dieser Lücke haben sie etwa den folgenden Verlauf:



Die Funktionswerte beider Funktionen werden — dem Betrage nach — in der Nähe der Definitionslücke beliebig groß. Dies ist auch unmittelbar einsichtig, denn wenn x sich immer mehr der Lücke 0 annähert, wird der Nenner beliebig klein, der Wert des Bruches also beliebig groß.

(2.2) Definition: Es sei a Definitionslücke einer rationalen Funktion f .

- a) Wenn die Werte von $f(x)$ für x in der Nähe von a betragsmäßig beliebig groß werden, nennt man a eine *Polstelle* von f .
- b) Haben die Funktionswerte unmittelbar 'vor' und unmittelbar 'nach' der Polstelle dasselbe Vorzeichen, so spricht man von einer Polstelle *ohne Vorzeichenwechsel*, andernfalls von einer Polstelle *mit Vorzeichenwechsel*.

Beide oben betrachteten Funktionen q_1 und q_2 haben bei $a = 0$ eine Polstelle, und zwar q_1 mit und q_2 ohne Vorzeichenwechsel. Da bei beiden Funktionen der Zähler sein Vorzeichen nicht ändert, erkennt

man sofort die Ursache für den fehlenden Vorzeichenwechsel bei der Funktion q_2 : Der Nennerterm x^2 hat bei $a = 0$ zwar eine Nullstelle, aber keinen Vorzeichenwechsel. Aus dem gleichen Grund hat q_1 bei $a = 0$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, weil der Nenner dort eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat.

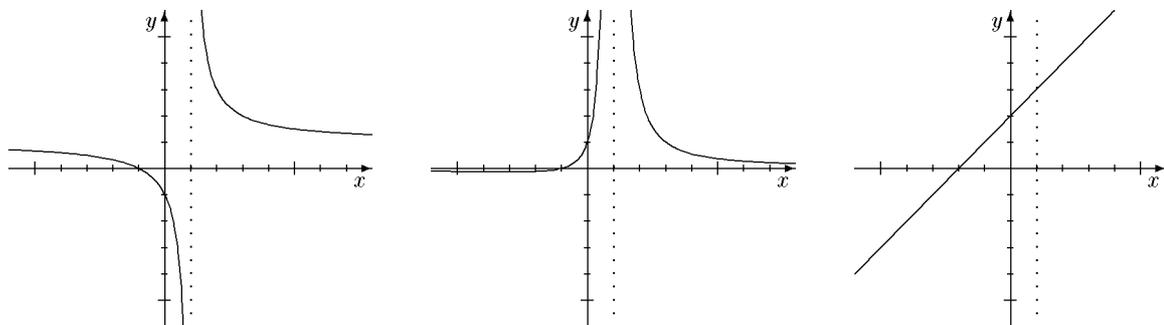
Nach diesen einfachsten gebrochen-rationalen Funktionen betrachten wir nun die folgenden etwas komplizierteren Beispiele:

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad f_2(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1}, \quad f_3(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}.$$

Durch Berechnung der Nullstellen der jeweiligen Nenner (!) stellen wir fest: Alle drei Funktionen haben lediglich bei $a = 1$ eine Definitionslücke, sie haben also den Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Eine Berechnung von Funktionswerten der f_i in der Nähe dieser Lücke ergibt folgende Werte

x	0,9	0,99	0,999	...	1,001	1,01	1,1
$f_1(x)$	-19	-199	-1999	...	2001	201	21
$f_2(x)$	190	19900	1999000	...	2001000	20100	210
$f_3(x)$	2,9	2,99	2,999	...	3,001	3,01	3,1

und damit folgende Funktionsgraphen in der Nähe der Lücke 1:



Graph von f_1

Graph von f_2

Graph von f_3

Wir erkennen, daß f_1 und f_2 bei $a = 1$ Polstellen besitzen. Zugleich unterscheiden sich beide Funktionen in ihrem Verhalten bei den Polstellen: f_1 wechselt an der Polstelle sein Vorzeichen, f_2 jedoch nicht. Der Grund ist klar: Der Nenner von f_1 hat bei $a = 1$ eine Nullstelle von erster Ordnung, also mit Vorzeichenwechsel, während der Nenner von f_2 dort eine Nullstelle zweiter Ordnung, also ohne Vorzeichenwechsel besitzt.

Ganz anders verhält es sich jedoch mit f_3 : Bei $a = 1$ liegt offenbar kein Pol vor, vielmehr nähern sich die Funktionswerte in der Nähe von $a = 1$ dem Wert 3 an. Der Graph von f_3 stellt sogar eine Gerade dar, die lediglich bei $a = 1$ eine Lücke hat: f_3 ist dort nicht definiert. Anders als bei einem Pol läßt sich diese Lücke *beheben*, indem man den Graphen durch einen einzigen zusätzlichen Punkt $(1|3)$ *erweitert*. Man nennt daher die Definitionslücke $a = 1$ *hebbbar*; der y -Wert 3 wird *Lückewert* genannt.

Was sind nun die Ursachen für diese *Hebbarkeit*? Wie bei den Polstellen ist $a = 1$ eine Nullstelle des Nenners. Nähert sich x also dem Wert 1 an, so wird der Nenner beliebig klein. Dennoch wird der Wert des Bruches $\frac{x^2+x-2}{x-1}$ nicht beliebig groß, vielmehr nähert er sich offenbar immer mehr dem Wert 3. Dies beruht darauf, daß bei $a = 1$ *nicht nur der Nenner, sondern auch der Zähler eine Nullstelle hat*. Bei Annäherung von x an die Lücke 1 werden also Nenner $x - 1$ und Zähler $x^2 + x - 2$ beliebig klein, so daß das Verhalten des Quotienten $f_3(x)$ nicht von vornherein klar ist. Warum sich $f_3(x)$ immer mehr dem Wert 3 annähert erkennt man folgendermaßen: Da Nenner- und Zählerpolynom eine Nullstelle bei $a = 1$ haben, kann man aus beiden den Linearfaktor $x - a = x - 1$ abspalten (siehe Satz (1.4)) und kürzen. Man erhält

$$f_3(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2 \text{ für } x \neq 1.$$

Wir sehen, daß — von der Definitionslücke $a = 1$ abgesehen — f_3 durch den linearen Funktionsterm $x + 2$ beschrieben werden kann. Dies erklärt den linearen Verlauf des Graphen von f_3 . Zugleich liefert dieser gekürzte Funktionsterm $\tilde{f}_3(x) = x + 2$ eine neue Funktion \tilde{f}_3 , die nun bei $a = 1$ *keine* Lücke mehr hat, aber davon abgesehen völlig mit f_3 übereinstimmt. Wir nennen \tilde{f}_3 die *Fortsetzung* von f_3 und neue Funktionswert $\tilde{f}_3(1) = 1 + 2 = 3$ ist gerade der *Lückewert* von f_3 (an der hebbaren Lücke 1).

(2.3) Definition: Sei f eine rationale Funktion und a eine Definitionslücke. Wir nennen a eine *hebbare Lücke* von f , wenn es eine rationale Funktion \tilde{f} gibt, die mit f an allen Stellen übereinstimmt, wo f definiert ist, die aber zusätzlich auch an der Stelle a definiert ist.

Wir haben oben gesehen, wie man einen Term $\tilde{f}(x)$ für diese *Fortsetzung* \tilde{f} finden kann: Man kürze in dem gegebenen Funktionsterm $\frac{g(x)}{h(x)}$ soweit wie möglich durch $x-a$. Wir fassen unsere bisherige Diskussion zusammen:

(2.4) Fazit: a) Ist f eine rationale Funktion, $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ihr Funktionsterm mit ganz-rationalem

Zähler $g(x)$ und Nenner $h(x)$, so sind die Nullstellen des Nenners $h(x)$ die Definitionslücken von f .

b) Ist eine solche Nullstelle a des Nenners keine Nullstelle des Zählers, so ist a Polstelle von f .

c) Ist dagegen $a \in \mathbb{R}$ Nullstelle des Nenners $h(x)$ und des Zählers $g(x)$, so spalte man in beiden den Linearfaktor $x-a$ so oft wie möglich ab (durch Polynomdivision) und kürze.

d) Hat auch der vollständig gekürzte Term $\tilde{f}(x)$ bei a eine Lücke, so ist a eine Polstelle von f .

Ist dagegen a keine Lücke von $\tilde{f}(x)$, so ist a hebbare Lücke von f ¹⁾.

Wie wir gesehen haben, können gebrochen-rationale Funktionen ihr Vorzeichen nicht nur an Nullstellen, sondern auch an Definitionslücken wechseln: Als mögliche Stellen für Vorzeichenwechsel kommen also die Nullstellen des Zählers *und* die Nullstellen des Nenners in Frage. Nun wechselt ein Quotient sein Vorzeichen aber nur dann, wenn der Zähler oder der Nenner, *aber nicht beide* (!) ihr Vorzeichen wechseln. Damit erhalten wir

(2.5) Satz: a) Rationale Funktionen können ihr Vorzeichen nur an ihren Nullstellen oder ihren Definitionslücken wechseln.

b) Eine rationale Funktion f wechselt bei a ihr Vorzeichen genau dann, wenn dort der Zähler oder der Nenner, *aber nicht beide*, eine Nullstelle ungerader Ordnung haben.

b. Das Verhalten im Unendlichen und Asymptoten. Neben der Vorzeichenverteilung interessiert uns nun noch das Verhalten rationaler Funktionen ‘im Unendlichen’. Während bei den ganz-rationale Funktionen vom Grad ≥ 1 für betragslich große x auch die Funktionswerte betragslich beliebig groß werden, können bei gebrochen rationalen Funktionen noch andere Phänomene auftreten. Etwa bei den auf S. 10 betrachteten Beispielen f_1 und f_2 stellt man fest: Die Funktionswerte $f_1(x)$ nähern sich für wachsende x ($x \rightarrow +\infty$, lies: ‘ x gegen plus Unendlich’) immer mehr dem Wert 1, während die Funktionswerte $f_2(x)$ sich immer mehr dem Wert 0 annähern. Man schreibt:

$$f_1(x) \rightarrow 1 \text{ für } x \rightarrow +\infty \quad \text{und} \quad f_2(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow +\infty.$$

Geometrisch bedeutet dies, daß sich der Graph von f_1 für $x \rightarrow +\infty$ immer mehr der Gerade mit der Gleichung $y = 1$ ‘anschmiegt’. Diese Gerade nennt man eine *Asymptote* (Schmiegegerade). Entsprechend ist die Gerade mit der Gleichung $y = 0$ (dies ist die x -Achse) Asymptote für die Funktion f_2 .

Wie kann man dies rechnerisch erkennen? Dazu betrachten wir den Funktionsterm

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

und klammern in Zähler und Nenner jeweils die höchste vorkommende x -Potenz aus. Wir erhalten so die folgende Beschreibung von f_1 (gültig für $x \in D(f_1)$, $x \neq 0$):

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}. \quad (*)$$

Wenn nun die Werte von x immer größer werden ($x \rightarrow +\infty$), nähert sich natürlich der Kehrwert $1/x$ immer mehr dem Wert 0. Damit nähern sich Zähler und Nenner in (*) immer mehr dem Wert 1. Also strebt der Quotient $f_1(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$. Für $x \rightarrow -\infty$ gelten dieselben Überlegungen.

Auch im Falle von f_2 kann man so vorgehen. Hier erhalten wir (wieder für $x \in D(f_2)$, $x \neq 0$)

$$f_2(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1} = \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

Wieder streben Zähler und Nenner des zweiten Bruches gegen 1, aber der erste Faktor $1/x$ nähert sich für $x \rightarrow \pm\infty$ immer mehr dem Wert 0. Insgesamt strebt $f_2(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow +\infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ (wir schreiben im Folgenden kurz $x \rightarrow \pm\infty$).

¹⁾ Dies ist genau dann der Fall, wenn der Zähler $g(x)$ der gegebenen Funktion f bei a eine Nullstellenordnung hatte, die mindestens so groß war wie die Nullstellenordnung des Nenners $h(x)$ bei a . Dann werden nämlich im Nenner $h(x)$ alle auftretenden Linearfaktoren $x-a$ gekürzt und danach ist a keine Nullstelle des Nenners mehr, also keine Definitionslücke von $\tilde{f}(x)$; die Lücke a von f ist *behoben* worden.

Mit derselben Methode erhält man allgemein das folgende Resultat:

(2.6) Satz: Sei f eine rationale Funktion. Dann gilt:

a) Ist der Zählergrad n kleiner als der Nennergrad m , so gilt

$$f(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty,$$

und die x -Achse ist Asymptote für f .

b) Stimmen Zähler- und Nennergrad überein und ist c der Quotient der führenden Koeffizienten von Zähler und Nenner, so gilt

$$f(x) \rightarrow c \text{ für } x \rightarrow \pm\infty,$$

und die Parallele zur x -Achse mit der Gleichung $y = c$ ist Asymptote für f .

c) Ist der Zählergrad größer als der Nennergrad, so werden die Werte $f(x)$ betragslich beliebig groß, wenn x betragslich beliebig groß wird:

$$f(x) \rightarrow \pm\infty \text{ für } x \rightarrow \pm\infty.$$

Beweis: Da f eine rationale Funktion ist, ist sie Quotient zweier ganzrationaler Funktionen, etwa

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

mit $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. Es ist also n der Zählergrad und m der Nennergrad von f , a_n der führende Koeffizient des Zählers und b_m der führende Koeffizient des Nenners.

Wir formen diesen Funktionsterm nun so um, daß man das Verhalten von $f(x)$ für den Grenzübergang $x \rightarrow \pm\infty$ studieren kann. Dazu klammern wir in Zähler und Nenner jeweils die höchste vorkommende x -Potenz aus, also x^n im Zähler und x^m im Nenner. Man erhält dann

$$f(x) = \frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \frac{b_{m-2}}{x^2} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}}. \quad (*)$$

Wir untersuchen in (*) nun die beiden Faktoren getrennt. Im zweiten Bruch streben alle Terme mit einer x -Potenz im Nenner gegen 0, wenn x betragslich beliebig groß wird, also strebt der Zähler gegen a_n und der Nenner gegen $b_m \neq 0$, der gesamte Bruch also gegen den Quotienten a_n/b_m .

Das Verhalten des ersten Faktors x^n/x^m hängt nur von n und m ab:

Ist $\underline{n = m}$, so ist dieser Faktor 1, und $f(x)$ strebt gegen $a_n/b_m = c$, wie in b) behauptet.

Ist $\underline{n < m}$, also $m - n \geq 1$, so gilt

$$\frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty.$$

Aus (*) ergibt sich die Behauptung von Teil a).

Ist schließlich $\underline{n > m}$, also $n - m \geq 1$, so wird

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

betragslich beliebig groß für $x \rightarrow \pm\infty$. Da a_n/b_m nicht Null ist, folgt daraus gemäß (*), daß auch $f(x)$ betragslich beliebig groß wird. Welches Vorzeichen $f(x)$ dabei annimmt, wird von $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ bestimmt.

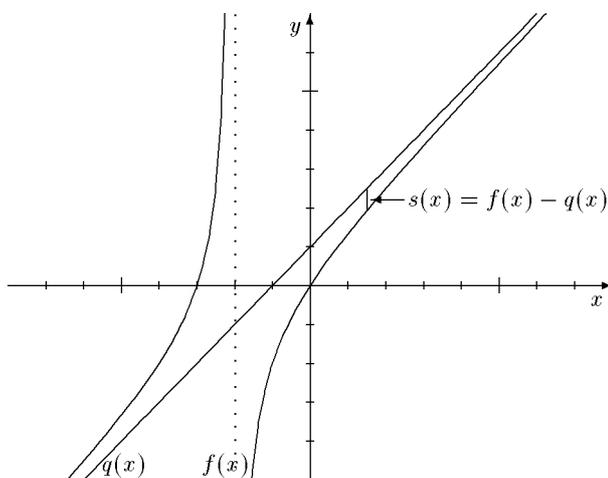
Wir wollen nun den Fall c) (Zählergrad größer als Nennergrad) noch etwas genauer untersuchen, und zwar mit Hilfe der Polynomdivision: Ist f eine rationale Funktion, so kann man den Zähler mit Rest durch den Nenner dividieren. Betrachten wir einmal das Beispiel

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 2}.$$

Dividiert man den Zähler $g(x) = x^2 + 3x$ durch den Nenner $h(x) = x + 2$, so erhält man $(x^2 + 3x) : (x + 2) = x + 1$ Rest -2 , d. h.

$$f(x) = x + 1 + \frac{-2}{x + 2}.$$

Damit haben wir $f(x)$ dargestellt als Summe aus einem ganzrationalen Term $q(x) = x + 1$ und einem gebrochen-rationalen Term $s(x) = -2/(x+2)$, bei dem der Zählergrad echt kleiner ist als der Nennergrad. Gemäß Satz (2.6) a) nähert sich $s(x)$ immer mehr dem Wert 0, wenn x betragsmäßig beliebig groß wird. Wegen $f(x) = q(x) + s(x)$ bedeutet dies, daß der Abstand zwischen $f(x)$ und $q(x) = x + 1$ sich dem Wert 0 beliebig annähert: Der Graph von f schmiegt sich immer mehr der Geraden mit der Gleichung $y = q(x)$ an; f hat damit eine Asymptote, ihre Gleichung ist gegeben durch $y = q(x)$.



Diese Überlegungen kann man allgemein für beliebige rationale Funktionen f durchführen, deren Zählergrad größer ist als der Nennergrad: Mittels Polynomdivision erhält man eine Darstellung von $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ in der Form

$$f(x) = q(x) + s(x), \quad q(x) \text{ ganz-rational, } \quad s(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty.$$

Damit schmiegt sich der Graph von f dem Graphen der ganz-rationalen Funktion q immer mehr an. Auf diese Weise hat man eine weitere Methode, mit der man das Verhalten einer rationalen Funktion f im Unendlichen bestimmen kann: Man dividiert den Zähler von f durch den Nenner mit Rest und untersucht den gefundenen Quotienten $q(x)$. Das Verhalten der rationalen Funktion f im Unendlichen stimmt dann mit dem von q überein. Da q ganz-rational ist, ist letzteres bekannt. (q hat den Grad $n - m$ und den führenden Koeffizienten a_n/b_m .)

Diese Überlegungen zeigen außerdem, daß auch im Falle c) Asymptoten existieren können. Ist nämlich der Zählergrad von f nur um 1 größer als der Nennergrad, so ist $q(x)$ vom Grad 1 und der Graph von q eine Gerade mit dem Anstieg a_n/b_m , an die sich der Graph von f 'anschiebt'.

Wir können nun unsere anschauliche Vorstellung einer Schmiegegeraden in der folgenden Definition festhalten und Satz (2.6) komplettieren:

(2.7) Definition: Sei f eine rationale Funktion. Eine *Asymptote* für f ist eine Gerade, die Graph einer linearen Funktion q ist mit der Eigenschaft: Der Abstand zwischen $f(x)$ und $q(x)$ nähert sich immer mehr dem Wert 0, wenn x betragsmäßig beliebig groß wird. In Formeln:

$$f(x) - q(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty.$$

Die in (2.6) a), b) genannten Asymptoten sind tatsächlich Asymptoten im Sinne dieser allgemeinen Definition. Außerdem erhalten wir die folgende Komplettierung von Satz (2.6):

(2.8) Satz: Es sei f eine rationale Funktion.

- f besitzt genau dann eine Asymptote, wenn der Zählergrad höchstens um 1 größer ist als der Nennergrad.
- Ist der Zählergrad kleiner als der Nennergrad, so ist die x -Achse Asymptote für f .
- Ist der Zählergrad gleich dem Nennergrad, so ist die Parallele zur x -Achse mit der Gleichung $y = c$ Asymptote für f ; dabei ist c der Quotient der führenden Koeffizienten von Zähler und Nenner.
- Ist der Zählergrad um 1 größer als der Nennergrad, so erhält man die Gleichung der Asymptote, indem man den Zähler $g(x)$ von $f(x)$ durch den Nenner $h(x)$ mit Rest dividiert: $g(x) : h(x) = q(x)$ Rest $r(x)$. $y = q(x)$ ist dann die Gleichung der Asymptoten. Ihr Anstieg ist das Verhältnis c der führenden Koeffizienten von Zähler und Nenner von $f(x)$.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die gefundenen Resultate.

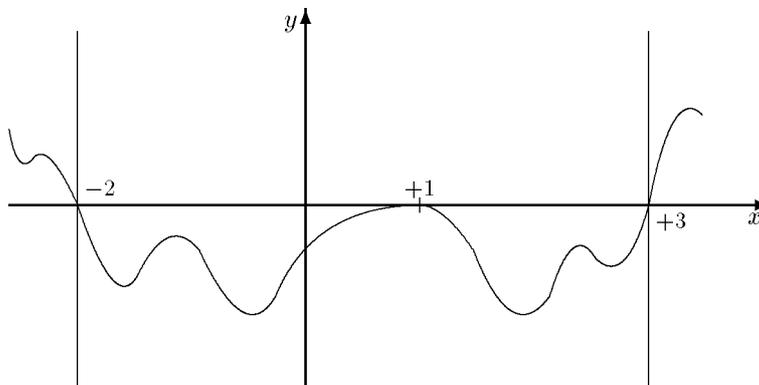
Bedingung	Asymptote	Asymptotengleichung	Grenzwert für $x \rightarrow \pm\infty$
Zählergrad < Nennergrad	x -Achse	$y = 0$	$f(x) \rightarrow 0$
Zählergrad = Nennergrad	parallel zur x -Achse	$y = c$	$f(x) \rightarrow c$
Zählergrad = Nennergrad+1	'schräg' mit Anstieg c	durch Polynomdivision ermitteln	kein Grenzwert in \mathbb{R} , $ f(x) \rightarrow \infty$
Zählergrad > Nennergrad+1	keine Asymptote		kein Grenzwert in \mathbb{R} , $ f(x) \rightarrow \infty$

Dabei ist c der Quotient der führenden Koeffizienten von Zähler und Nenner.

II. Differentialrechnung

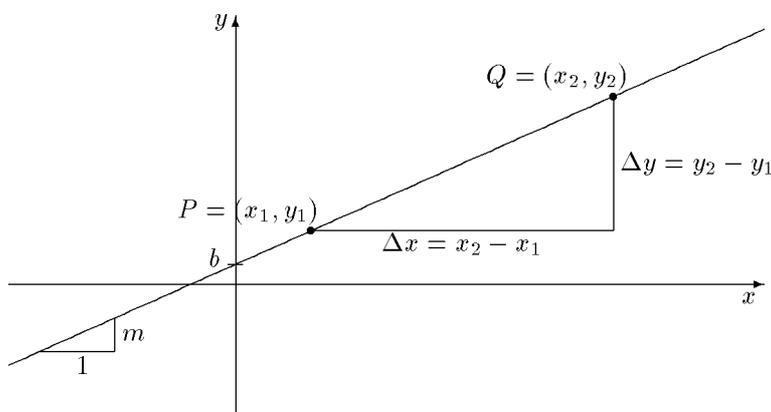
§3 Die Ableitung ganzrationaler Funktionen

Unsere bisherigen Diskussionen in den §§1,2 ermöglichte nur die Bestimmung der Nullstellen und Lücken rationaler Funktionen und des *Vorzeichens der Funktionswerte*. Welchen *Verlauf* jedoch die Funktion dort hat, kann aus den bisherigen Überlegungen nicht entnommen werden. So lassen die Berechnungen des Beispiels (*) auf S. 6 nicht nur den dort skizzierten Verlauf (siehe S. 6), sondern etwa auch den folgenden zu:



Um nun den Verlauf zwischen zwei Nullstellen bzw. Lücken genauer zu erfassen, wollen wir den Begriff des *Anstiegs* des Funktionsgraphen präzisieren. Wenn uns dies gelingt und wir entscheiden können, in welchen Bereichen der Funktionsgraph *steigt* und wo er *fällt*, so können wir den Verlauf des Graphen schon recht genau bestimmen.

a. Sekantensteigung, Differenzenquotient, Tangente. Der Begriff des *Anstiegs* eines Funktionsgraphen ist für lineare Funktionen bekannt (oder sollte es zumindest sein). Eine lineare Funktion, d. i. eine ganz-rationale Funktion vom Grade ≤ 1 , ist gegeben durch einen Funktionsterm der Form $f(x) = mx + b$ mit reellen Zahlen $m, b \in \mathbb{R}$. Ihr Graph ist eine Gerade in der x, y -Koordinatenebene. Die geometrische Bedeutung der beiden Zahlen m, b kann man der folgenden Skizze des Graphen $G(f)$ von f entnehmen:



$b = f(0)$ ist der Funktionswert von f an der Stelle 0, d. h. b ist der sog. *y-Achsenabschnitt*, wie er eingezeichnet ist.

Die Zahl m gibt an, um wieviel der Funktionswert $f(x)$ zunimmt, wenn das Argument x um 1 größer

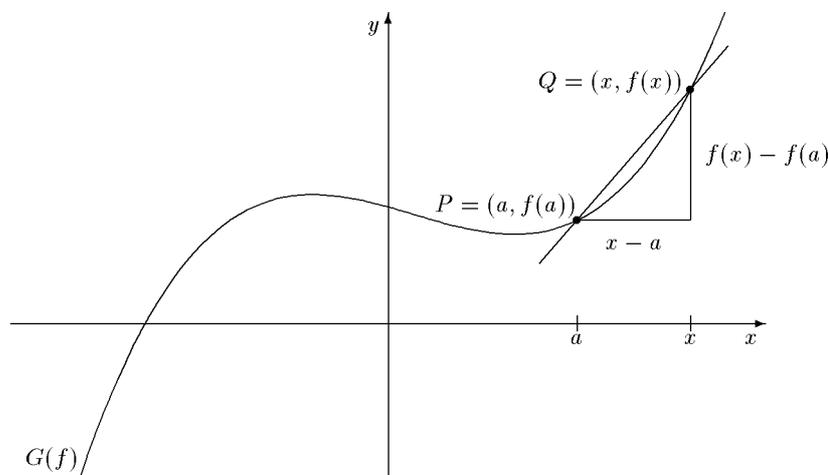
wird. Man kann daher m in der skizzierten Weise in einem sog. *Steigungsdreieck* wiederfinden, dessen Kathete parallel zur x -Achse die Länge 1 hat. Zeichnet man ein *beliebiges* Steigungsdreieck ein (mit den Kathetenlängen Δy und Δx), so ist m gerade das Verhältnis dieser beiden Größen: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Sind $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ zwei Punkte auf der Geraden (etwa die Eckpunkte des skizzierten Steigungsdreiecks), so ergibt sich $\Delta y = y_2 - y_1$ und $\Delta x = x_2 - x_1$ und man erhält:

Geradenanstieg: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Dies ist die endgültige Definition des Geradenanstiegs. Sie gilt auch, wenn die auftretenden Größen $y_2 - y_1$ oder $x_2 - x_1$ negativ sind!

Will man nun für einen beliebigen Funktionsgraphen den Anstieg bestimmen, so hat man zunächst das Problem, daß der Anstieg an verschiedenen Stellen verschieden ist. Wir müssen also zunächst eine *Stelle* a fixieren und untersuchen den Graphen in der Nähe des Punktes $P = (a, f(a))$. Dazu wählen wir in der Nähe von P einen weiteren Punkt $Q = (x, f(x))$ auf $G(f)$ ($x \neq a$) und verbinden beide durch eine Gerade. Eine solche *Gerade durch zwei Punkte des Graphen* $G(f)$ nennt man eine *Sekante*.



Der Anstieg dieser Sekante ist gegeben durch $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Man nennt diesen *Sekantenanstieg* wegen der Form des Terms auch *Differenzenquotient*:

Sekantenanstieg oder Differenzenquotient: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Dieser ist (bei fixierter Stelle a) vom Punkt Q , d. h. von x abhängig: Ändert man x , so ändert sich in der Regel der Sekantenanstieg. Er stellt mithin eine *Funktion* von x dar.

Wir wollen diese einmal für die (einfachste nicht-lineare) Funktion f gegeben durch $f(x) = x^2$ untersuchen: Der Differenzenquotient ist dann

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

und man erhält speziell für $a = 1$ die (Sekantenanstiegs-) Funktion

$$D(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Für verschiedene Werte von x ergeben sich folgende Sekantenanstiege:

x	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001
$x^2 - 1$	3	1,25	0,21	0,0201	0,002001	0,00020001	0,0000200001
$x - 1$	1	0,5	1/10	1/100	1/1000	1/10000	1/100000
$\frac{x^2-1}{x-1}$	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001

Es fällt sofort auf, daß sich die Sekantenanstiege immer mehr dem Wert 2 nähern, wenn sich x immer mehr dem Wert $1 = a$ nähert. Es ist sinnvoll, dann diesen Grenzwert 2, dem sich die Sekantenanstiege beliebig annähern, als den gesuchten Anstieg des Graphen im Punkte $P = (a, f(a))$ zu definieren. Wir sagen: Die Funktion f gegeben durch $f(x) = x^2$ hat an der Stelle $a = 1$ den Anstieg 2.

Genauso wie in obigem Beispiel geht man allgemein (bei beliebigem f) vor. Will man den Anstieg von $G(f)$ an der Stelle a , d. h. beim Punkt $P = (a, f(a))$ erfassen, so nähert man sich mit dem Punkt $Q = (x, f(x))$ immer mehr P , d. h. x nähert sich immer mehr a . Man untersucht dann das Verhalten der Sekantenanstiege bei Annäherung von x an a . Wenn sich die Sekantenanstiege dabei immer mehr einer festen Zahl $b \in \mathbb{R}$ nähern, so schreibt man dies symbolisch in folgender Form:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow b \quad \text{für } x \rightarrow a$$

und liest den Pfeil ' \rightarrow ' als 'strebt gegen'. Noch kompakter schreiben wir dies als

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b$$

und lesen dies als: 'Der Grenzwert (Limes) für x gegen a von $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ist b '.

(3.1) Definition: Gegeben sei eine Funktion f und $a \in D(f)$ eine Stelle im Definitionsbereich. Wir definieren den Anstieg oder Ableitungswert von f an der Stelle a als den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

— wenn er in \mathbb{R} existiert. Wir bezeichnen ihn dann mit $f'(a)$ (lesen Sie: 'f Strich von a'), also:

Anstieg von f an der Stelle a : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Nachdem wir den Begriff des Anstiegs einer Funktion f an einer Stelle a hinreichend präzisiert haben, können wir nun auch den Begriff der Tangente präzise fassen:

(3.2) Definition: Gegeben ist eine Funktion f , die an einer Stelle a differenzierbar ist, für die also der Ableitungswert $f'(a)$ existiert. Dann versteht man unter der Tangente an den Graphen von f im Punkte $(a, f(a))$ die Gerade durch den Punkt $(a, f(a))$, deren Steigung genau der Anstieg $f'(a)$ von f an der Stelle a ist.

Aufgrund dieser Definition erhalten wir sofort eine Gleichung für die Tangente:

(3.3) Bemerkung: Eine Gleichung für die Tangente an den Graphen von f im Punkte $(a, f(a))$ ist gegeben durch

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Definiert man die Funktion t durch $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, so ist ihr Graph genau die oben beschriebene Tangente.

Beweis: Geradengleichungen sind von der Form $y = mx + b$ (für Geraden mit dem Anstieg m und dem y -Achsenabschnitt b) oder $x = c$ (für Parallelen zur y -Achse). Für die Tangente ist der Anstieg festgelegt; er soll genau gleich dem Anstieg $f'(a)$ der Funktion f an der Stelle a sein. Also $m = f'(a)$ und die Gleichung lautet $y = f'(a)x + b$. Man muß nun b bestimmen. Dazu verwenden wir die zweite Forderung bei der Tangentendefinition: Die Tangente soll durch den Punkt $P = (a, f(a))$ gehen; das bedeutet, daß die Koordinaten dieses Punktes die Gleichung $y = f'(a)x + b$ erfüllen müssen:

$$f(a) = f'(a) \cdot a + b, \quad \text{also } b = f(a) - f'(a) \cdot a.$$

Damit erhält man — wie behauptet — als Gleichung der Tangente

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \cdot a = f(a) + f'(a)(x - a).$$

b. Die Ableitung der Potenzfunktionen. Wir wollen uns nun mit der Berechnung von Ableitungswerten auseinandersetzen. Dazu kehren wir zunächst zu unserem obigen Beispiel $f(x) = x^2$ zurück.

Die berechneten Werte lassen vermuten, daß für $a = 1$ gilt: $f'(1) = 2$. Die Sekantenanstiege scheinen dem Wert 2 immer näher zu kommen. Jedoch haben wir den Sekantenanstieg nur für spezielle Werte von x berechnet; wir haben nicht gezeigt, daß bei *beliebiger* Annäherung an $a = 1$ die Sekantenanstiege beliebig nahe bei 2 liegen. (Insbesondere haben wir keine Werte $x < 1$ untersucht. Ergänzen Sie die obige Tabelle durch die Werte für $x = 0; 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999$.)

Wir wollen dies jetzt (sogar bei beliebigem a) zeigen. Dazu stellen wir zunächst fest, daß bei festem a der Differenzenquotient eine *rationale* Funktion von x ist:

$$D(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

Wir untersuchen nun diese rationale Funktion D mit den uns bekannten Mitteln aus §2 a: Die einzige Definitionslücke liegt bei a . Durch Einsetzen von a in den Zähler erkennen wir, daß a auch Nullstelle des Zählers ist. Wie üblich stellen wir durch Kürzen fest, daß a eine *hebbare* Lücke ist, und erhalten als Ersatzfunktion

$$D(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a = \tilde{D}(x).$$

An dieser Form erkennt man sofort: Ist $x \neq a$, aber nähert sich x immer mehr dem Wert a , so nähert sich $D(x) = \tilde{D}(x) = x + a$ natürlich immer mehr dem Wert $a + a = 2a$. (Dies ist nichts anderes als der 'Lückenwert' $\tilde{D}(a) = 2a$.)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = a + a = 2a.$$

Wir fassen also zusammen:

- Ist die Funktion f gegeben durch $f(x) = x^2$, so existiert an jeder Stelle a der Ableitungswert; er ist gegeben durch

$$f'(a) = 2a.$$

Insbesondere bei $a = 1$ ergibt sich — in Übereinstimmung mit obiger Tabelle — $D(x) = x + 1$ (für $x \neq 1$) und $f'(1) = 2$.

Ähnlich kann man für alle ganzrationalen Funktionen f vorgehen. Wir wollen dies einmal für $f(x) = x^3$ bzw. $f(x) = x^4$ durchführen:

$$D(x) = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + xa + a^2 \text{ für } f(x) = x^3 \text{ bzw.}$$

$$D(x) = \frac{x^4 - a^4}{x - a} = x^3 + x^2a + xa^2 + a^3 \text{ für } f(x) = x^4.$$

[Führen Sie die zum Kürzen nötige Polynomdivision notfalls zunächst mit konkreten Werten $a = 1, 2, 3$ und erst dann für beliebiges a durch.] Wieder kann man unmittelbar erkennen, wie sich der Differenzenquotient ändert, wenn sich x dem Wert a beliebig nähert:

$$\lim_{x \rightarrow a} D(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + xa + a^2) = a^2 + aa + a^2 = 3a^2 \text{ für } f(x) = x^3 \text{ bzw.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} D(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^3 + x^2a + xa^2 + a^3) = a^3 + a^2a + aa^2 + a^3 = 4a^3 \text{ für } f(x) = x^4.$$

In beiden Fällen existiert also der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \rightarrow a$, der dann — gemäß unserer Definition (3.1) — der Ableitungswert der gegebenen Funktion an der Stelle a ist. Also gilt:

$$f(x) = x^3 \implies f'(a) = 3a^2,$$

$$f(x) = x^4 \implies f'(a) = 4a^3.$$

Allgemein gilt für beliebige natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ (mit demselben Beweis wie für $n = 3, 4$):

(3.4) Satz: Die Potenzfunktionen f gegeben durch $f(x) = x^n$ besitzen an allen Stellen $a \in \mathbb{R}$ einen Ableitungswert; er ist gegeben durch:

$$f'(a) = na^{n-1}.$$

c. Die Ableitungsfunktion. Aufgrund von Satz (3.4) kennen wir nun gewisse Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die an allen Stellen $a \in \mathbb{R}$ der Ableitungswert $f'(a)$ existiert und explizit bekannt ist.

(3.5) Definition: a) Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar an einer Stelle a* im Definitionsbereich D , wenn der Ableitungswert $f'(a)$ existiert. (Letzteres im Sinne der Definition (3.1).) Ist die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ an *jeder* Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar, so sagt man kurz: *f ist differenzierbar.*

b) Eine Funktion f bestimmt eine neue Funktion f' , ihre *Ableitung*, die jeder Stelle x in D , an der f differenzierbar ist, den Ableitungswert von f an dieser Stelle zuordnet:

$$f'(x) \text{ ist der Anstieg der Funktion } f \text{ an der Stelle } x.$$

Gemäß Satz (3.4) sind die Potenzfunktion f_n , $f_n(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar mit der Ableitungsfunktion f'_n gegeben durch $f'_n(x) = nx^{n-1}$:

$$f(x) = x^n \implies f'(x) = nx^{n-1} \text{ für } n \geq 1.$$

Wir wollen nun versuchen allgemein ganzrationale Funktionen f abzuleiten. Wichtiges Hilfsmittel sind dafür die folgenden Ableitungsregeln.

(3.6) Satz: (Erste Ableitungsregeln)

a) (Faktorregel) Ist die Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ bei $a \in D$ differenzierbar, so ist für jede reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $f = cg : D \rightarrow \mathbb{R}$, die durch den Funktionsterm $f(x) = c \cdot g(x)$ gegeben ist, bei a differenzierbar. Der Ableitungswert ist gegeben durch

$$f'(a) = (cg)'(a) = c \cdot g'(a).$$

b) (Summenregel) Sind $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ bei $a \in D$ differenzierbare Funktionen, so ist auch ihre Summenfunktion $f = g + h : D \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch den Funktionsterm $f(x) = g(x) + h(x)$ bei a differenzierbar. Der Ableitungswert ist gegeben durch

$$f'(a) = (g + h)'(a) = g'(a) + h'(a).$$

Beweis: a) Wir müssen den Differenzenquotienten von $f = c \cdot g$ zur Stelle a untersuchen. Dieser ist gegeben durch

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{c \cdot g(x) - c \cdot g(a)}{x - a} = c \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Der Differenzenquotient von $f = cg$ ist also das c -fache des Differenzenquotienten von g . Der letztere strebt gegen $g'(a)$, da g bei a differenzierbar ist. Dann gilt natürlich für das c -fache

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \rightarrow c \cdot g'(a),$$

womit gezeigt ist, daß der Differenzenquotient von f einen Grenzwert für $x \rightarrow a$ besitzt, und dieser gerade $c \cdot g'(a)$ ist:

$$f'(a) = c \cdot g'(a).$$

Ad b): Wieder betrachten wir den Differenzenquotienten von f :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{(g(x) + h(x)) - (g(a) + h(a))}{x - a} = \frac{g(x) + h(x) - g(a) - h(a)}{x - a} \\ &= \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + \frac{h(x) - h(a)}{x - a}. \end{aligned}$$

Der Differenzenquotient der Summenfunktion $f = g + h$ ist also die Summe der Differenzenquotienten von g und von h . Die einzelnen Summanden streben für $x \rightarrow a$ gegen den jeweiligen Ableitungswert $g'(a)$ bzw. $h'(a)$. Dann gilt natürlich für die Summe

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + \frac{h(x) - h(a)}{x - a} \rightarrow g'(a) + h'(a) \quad \text{für } x \rightarrow a.$$

Also existiert der Ableitungswert $f'(a)$ und ist gleich der Summe $g'(a) + h'(a)$. Damit ist Teil b) bewiesen.

Achtung: Die Ableitungsregel für die Produktfunktion $g \cdot h$ werden wir erst später kennenlernen. Sie ist komplizierter als die Regel (3.6),b) für $g + h$: *Die Ableitung der Produktfunktion $g \cdot h$ ist nicht das Produkt der Ableitungen!* Dies kann man leicht an den uns schon bekannten Ableitungsregeln für die Potenzfunktionen ablesen: Betrachten wir $g(x) = x^2$ und $h(x) = x^3$. Dann ist $g'(x) \cdot h'(x) = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3$ offensichtlich **nicht** die Ableitung von $g(x) \cdot h(x) = x^5$.

Beliebige ganzrationale Funktionen werden durch Addition und Multiplikation mit Zahlen aus den Potenzfunktionen f_n , gegeben durch $f_n(x) = x^n$, aufgebaut. Dabei sind für n beliebige natürliche Zahlen oder 0 zulässig. Gemäß (3.4) und (3.6) können wir daher alle ganz-rationalen Funktionen ableiten, wenn wir noch die Ableitung von f_0 kennen. Es ist $f_0(x) = x^0 = 1$ die konstante Funktion vom Wert 1. Deren Ableitungswert ist an allen Stellen 0: (Überprüfen Sie dies selbst!) Dies heißt:

(3.7) Bemerkung: Konstante Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ mit einer festen reellen Zahl c , sind an allen Stellen $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar und ihre Ableitungsfunktion f' ist konstant vom Wert 0:

$$f(x) = c \text{ konstant} \implies f'(x) = 0.$$

Zusammenfassend erhalten wir

(3.8) Satz: Ganzrationale Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind differenzierbar. Ist die Funktion f durch den Funktionsterm

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gegeben, so ist die Ableitung $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch den Funktionsterm

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1.$$

Insbesondere sehen wir, daß die Ableitungsfunktion wieder eine ganz-rationale Funktion ist, deren Grad um 1 kleiner ist als der von f , wenn letzterer ≥ 1 ist.

Wir müssen lediglich den letzten Satz begründen. f hat den Grad n , wenn $a_n \neq 0$ ist. Ist außerdem $n \geq 1$, also $n \neq 0$, so ist natürlich auch $n a_n \neq 0$ und f' hat den Grad $n - 1$.

§4 Monotonie und Extrema

a. Monotonieintervalle. Nachdem wir nun in der Lage sind, beliebige ganz-rationale Funktionen abzuleiten, wollen wir uns jetzt wieder der Frage zuwenden, was wir aus der Kenntnis der Ableitung f' über die Funktion f selbst erfahren können. Wir hatten den Ableitungswert $f'(a)$ von f an der Stelle a eingeführt als Maß für den Anstieg der Funktion f bei a . Dies bedeutet insbesondere, daß bei positivem Ableitungswert die Funktion steigen und bei negativem Ableitungswert fallen muß. Wir wollen dies präzisieren und beweisen:

(4.1) Bemerkung: Die Funktion f besitze an der Stelle a den Ableitungswert $f'(a)$. Dann gilt:

a) Ist $f'(a) > 0$, so steigt f an der Stelle a .

[Das heißt: Wenn nur x nahe genug bei a liegt, gilt: $f(x) < f(a)$ für $x < a$ und $f(x) > f(a)$ für $x > a$.]

b) Ist $f'(a) < 0$, so fällt f an der Stelle a .

[Das heißt: Wenn nur x nahe genug bei a liegt, gilt: $f(x) > f(a)$ für $x < a$ und $f(x) < f(a)$ für $x > a$.]

Beweis: Der Ableitungswert $f'(a)$ ist der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, also kommen die Werte von $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ dem Ableitungswert $f'(a)$ beliebig nahe, wenn nur x nahe genug bei a liegt. Für $f'(a) > 0$ bedeutet dies, daß auch der Differenzenquotient positiv werden muß, wenn x nur nahe genug bei a ist. Die Positivität des Differenzenquotienten bedeutet, daß sein Zähler $f(x) - f(a)$ dasselbe Vorzeichen hat wie sein Nenner $x - a$: Ist also $x > a$, d. h. $x - a$ positiv, so ist auch $f(x) - f(a)$ positiv, d. h. $f(x) > f(a)$, wie in der Behauptung angegeben. Genauso argumentiert man für $x < a$ und im Falle $f'(a) < 0$.

Man kann nun diese Bemerkung benutzen, um für eine differenzierbare Funktion f Bereiche der reellen Zahlengerade zu bestimmen, in denen die Funktionswerte $f(x)$ bei wachsendem x ständig zu- bzw. ständig abnehmen. Man geht dazu folgendermaßen vor:

1) Die Ableitung f' berechnen.

2) Für die Ableitung f' die Nullstellen und die Vorzeichenverteilung bestimmen. (Für ganzrationale Funktionen wie in §1 ausführlich diskutiert.)

3) Gilt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von f' stets $f'(x) > 0$, so müssen in diesem Bereich die Funktionswerte von f wachsen, während sie bei $f'(x) < 0$ abnehmen müssen.

Die in 3) bestimmten zusammenhängenden Abschnitte der reellen Zahlengerade, nennt man die *Monotonieintervalle* von f : In ihnen ist die Funktion *monoton*, und zwar *monoton wachsend* oder *monoton fallend*.

b. Extremstellen. Man kann nun die obigen Überlegungen benutzen, um für eine differenzierbare Funktion die sog. *Extremstellen* zu bestimmen.

(4.2) Definition: Sei f eine Funktion und a ein Punkt im Innern des Definitionsbereichs von f .

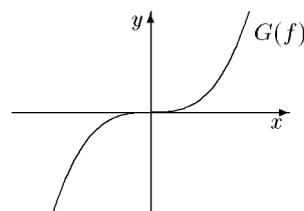
- a) Wir sagen: f hat bei a ein (lokales) *Maximum*, wenn für x , die nahe genug bei a , aber verschieden von a sind, gilt: $f(x) < f(a)$.
- b) Entsprechend spricht man von einem (lokalen) *Minimum*, wenn $f(x) > f(a)$ gilt.
- c) f hat bei a ein (lokales) *Extremum*, wenn ein Maximum oder Minimum vorliegt.

Ein Blick auf Bemerkung (4.1) zeigt, daß eine differenzierbare Funktion f an Stellen a mit Ableitungswert $f'(a) \neq 0$ kein Extremum haben kann: In der Nähe von a gibt es dann nämlich sowohl Stellen x mit $f(x) > f(a)$ als auch solche mit $f(x) < f(a)$. Liegt also bei a ein Extremum vor, so muß notwendigerweise $f'(a) = 0$ gelten:

$$a \text{ Extremstelle von } f \implies a \text{ Nullstelle von } f'.$$

Damit kommen als Extremstellen von f nur die Nullstellen von f' in Frage. Aber Vorsicht, nicht alle Nullstellen von f' sind Extremstellen:

Warnendes Beispiel: An einer Stelle a mit $f'(a) = 0$ kann, muß aber nicht, ein Extremum von f vorliegen: Die Funktion f gegeben durch $f(x) = x^3$ hat bei $a = 0$ den Ableitungswert $f'(a) = 0$, aber kein Extremum. Man sagt, sie hat dort einen *Sattelpunkt*.



Ob nun bei einer Nullstelle a der Ableitung f' ein Extremum von f vorliegt, und welcher Art es ist (Maximum oder Minimum), hängt davon ab, ob und wie f' bei a sein Vorzeichen wechselt.

- (4.3) Satz:**
- a) Eine differenzierbare Funktion f kann nur an solchen Stellen a ein lokales Extremum haben, an denen $f'(a) = 0$ ist.
 - b) Wechselt f' bei a sein Vorzeichen, so besitzt f bei a ein Extremum. Genauer gilt: Wechselt f' bei a sein Vorzeichen von $-$ zu $+$, so hat f bei a ein Minimum, wechselt f' bei a sein Vorzeichen von $+$ zu $-$, so hat f bei a ein Maximum.
 - c) Ist a zwar eine Nullstelle von f' , aber die Werte von f' in der Nähe einheitlich positiv oder einheitlich negativ (es liegt also kein Vorzeichenwechsel vor), so hat f bei a auch kein Extremum, sondern einen sog. *Sattelpunkt*.

Beweis: a) haben wir schon oben begründet. b) folgt ebenfalls aus Abschnitt a.: Hat f' 'kurz vor' a negative und 'nach' a positive Werte, so ist die Funktion f kurz vor a steigend und dahinter fallend, hat also bei a ein lokales Maximum. Genauso argumentiert man für den anderen Vorzeichenwechsel und für c).

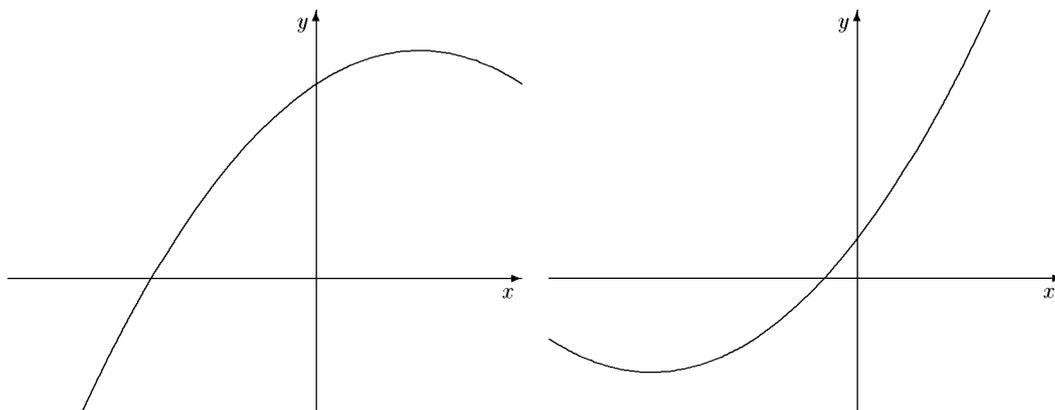
Anmerkung: Sieht man einmal von den konstanten Funktionen ($f(x) = c$) ab (deren Ableitungsfunktion f' nimmt überall den Wert 0 an), so haben alle differenzierbaren Funktionen, die Ihnen im Mathematikunterricht begegnen werden, die folgende Eigenschaft: In der Nähe einer Nullstelle a von f' liegt keine weitere Nullstelle von f' (die Nullstellen von f' liegen *isoliert*) und einer der in b) oder c) genannten Fälle liegt vor. Daher gilt für solche differenzierbaren Funktionen mit isolierten Nullstellen der Ableitung:

$$\text{Extremstellen von } f = \text{Nullstellen von } f' \text{ mit Vorzeichenwechsel.}$$

§5 Höhere Ableitungen

Wir haben im vorhergehenden Paragraphen gesehen, daß man das Monotonieverhalten einer differenzierbaren Funktion f mit Hilfe ihrer Ableitung f' studieren kann. Und zwar ist das *Monotonieverhalten der Funktion f* durch die *Vorzeichenverteilung der Ableitungsfunktion f'* bestimmt. Insbesondere kann man dadurch die *Extremstellen der Funktion f* als die *Vorzeichenwechselstellen der Ableitungsfunktion f'* charakterisieren. Wir wollen uns nun mit weiteren Charakteristika des Graphen $G(f)$ einer Funktion f beschäftigen:

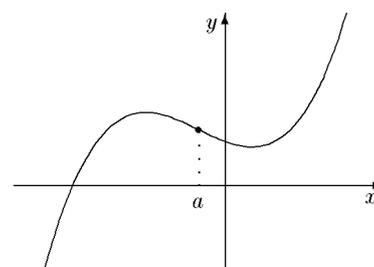
a. Krümmung und Wendestellen. Wir wollen den Begriff der *Krümmung* eines Funktionsgraphen mathematisch präzisieren. Wir veranschaulichen uns dazu einmal verschieden gekrümmte Funktionsgraphen:



Der erste Graph hat offenbar eine *Rechtskrümmung*, während der zweite *linksgekrümmt* ist. Wenn man nun einmal die Änderung des Anstiegs bei beiden Funktionen vergleicht, so erkennt man: Bei dem rechtsgekrümmten Graphen wird (mit zunehmendem x -Wert) der Anstieg immer geringer, schließlich sogar negativ! Beim linksgekrümmten zweiten Graphen hingegen wächst der Anstieg (bei zunehmender x -Koordinate). Dies führt zu der folgenden mathematisch präzisen Definition des Krümmungsbegriffes:

(5.1) Definition: a) Wir nennen eine differenzierbare Funktion f über einem Teilbereich ihres Definitionsbereiches *rechtsgekrümmt*, wenn ihre Ableitung f' über diesem Bereich monoton fällt, und *linksgekrümmt*, wenn f' in diesem Bereich monoton wächst.

b) Unter einer *Wendestelle* einer Funktion f versteht man solche Stellen a im Definitionsbereich, an denen die Funktion ihr Krümmungsverhalten ändert, das heißt: In einem kleinen Bereich 'vor' a ist f rechts- und kurz 'nach' a linksgekrümmt, oder umgekehrt.



Wir halten fest: Das *Krümmungsverhalten einer Funktion f* ist durch das *Monotonieverhalten ihrer Ableitung f'* bestimmt. Dementsprechend sind *Wendestellen einer Funktion f* solche Stellen a , an denen die Ableitung f' ihr Monotonieverhalten ändert, also *Extremstellen der Ableitung f'* :

Wendestellen von f = Extremstellen von f' .

Nun sind gemäß §4 die Extremstellen einer Funktion gerade die Nullstellen ihrer Ableitung mit Vorzeichenwechsel; also sind die Extremstellen von f' gerade die Nullstellen mit Vorzeichenwechsel von deren Ableitung $(f')'$. Die Funktion $(f')'$, die 'Ableitung der Ableitung von f ', bezeichnen wir kurz mit f'' und nennen sie die *zweite* Ableitung von f . Sie existiert, wenn f und f' differenzierbar sind, man sagt, wenn f *zweimal differenzierbar* ist.

Entsprechend definieren wir *höhere Ableitungsfunktionen* $f^{(3)} = f''' = (f'')'$, $f^{(4)} = (f^{(3)})'$ usw.

Formulieren wir die obigen Überlegungen mit Hilfe dieser höheren Ableitungen, so erhalten wir:

(5.2) Satz: a) Eine zweimal differenzierbare Funktion f kann nur (muß aber nicht!) an solchen Stellen a eine Wendestelle haben, an denen die zweite Ableitung f'' eine Nullstelle hat: $f''(a) = 0$.

b) Wechselt die zweite Ableitung f'' bei a ihr Vorzeichen, so besitzt die Ausgangsfunktion f bei a eine Wendestelle.

c) Ist a zwar eine Nullstelle von f'' , aber die Werte von f'' in der Nähe einheitlich ≥ 0 oder einheitlich ≤ 0 (liegt also kein Vorzeichenwechsel von f'' vor), so hat f bei a auch keine Wendestelle.

Für zweimal differenzierbare Funktionen f , deren zweite Ableitung nur isolierte Nullstellen hat, kann man kurz sagen:

Wendestellen von f = Nullstellen von f'' mit Vorzeichenwechsel.

b. Vorzeichenwechsel und Ableitungen. Ob eine Funktion f an einer Stelle a einen Vorzeichenwechsel hat, kann man für *rationale* Funktionen f daran erkennen, welche Nullstellenordnung k die

Funktion f an der Stelle a hat (siehe Definition (1.5), p. 6). Diese Nullstellenordnung kann man leicht ablesen, wenn man *alle* Nullstellen von f bestimmt und den Funktionsterm in Linearfaktoren zerlegt hat. Kennt man jedoch nur diese eine Nullstelle a , so muß man gemäß der Definition den Funktionsterm $f(x)$ von f so oft, wie dies ohne Rest möglich ist, durch den Linearfaktor $x - a$ dividieren (mittels Polynomdivision) und so die Nullstellenordnung ermitteln.

Wir wollen nun noch eine andere Methode kennenlernen, bei der man mit Hilfe der Ableitung Vorzeichenwechsel nachweisen kann. Diese Methode erfaßt aber *nur einfache Nullstellen!* Sie benutzt die folgende Tatsache:

(5.3) Bemerkung: *Es sei a eine Nullstelle einer differenzierbaren Funktion f . Dann gilt:*

- a) *Ist $f'(a) \neq 0$, so hat f bei der Nullstelle a einen Vorzeichenwechsel. Genauer:*
- b) *Ist $f'(a) > 0$, so hat f bei a einen Vorzeichenwechsel von '−' nach '+'.
c) *Ist $f'(a) < 0$, so hat f bei a einen Vorzeichenwechsel von '+' nach '−'.**

Achtung: Ist $f'(a) = 0$, so kann man nichts über einen evtl. Vorzeichenwechsel von f an ihrer Nullstelle a schließen. Die Bedingung $f'(a) \neq 0$ in (5.3) ist nur eine *hinreichende* Bedingung für das Vorliegen eines Vorzeichenwechsels, sie ist nicht *notwendig*. Sie besagt gerade, daß die Nullstelle a von f von *erster* Ordnung ist. Vorzeichenwechsel von f an Nullstellen 3., 5. ... Ordnung werden also durch (5.3) *nicht* erfaßt.

[Es sei hier für Interessierte angemerkt, daß man jedoch mittels höherer Ableitungen auch die genaue Nullstellenordnung von f bei a bestimmen kann. Es gilt folgendes: Ist $f(a) = 0$, so berechne man $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, usw. und stelle fest, bei der wievielten Ableitung *das erste Mal ein Wert $\neq 0$ auftritt*; diese Zahl gibt die Nullstellenordnung von f an der Stelle a an!]

Als Begründung für (5.3) ist nur zu bemerken: Ist $f'(a) > 0$, so steigt f an der Stelle a , d. h. 'kurz vor' a sind die Werte $f(x)$ kleiner als $f(a) = 0$ und 'kurz hinter' a gilt $f(x) > f(a) = 0$ (Bemerkung (4.1)). Damit ist b) bewiesen. Für c) argumentiert man genauso.

c. Hinreichende Kriterien für Extrem-/Wendestellen mittels höherer Ableitungen. Extremstellen sind 'Vorzeichenwechselstellen' der ersten Ableitung f' , während Wendestellen 'Vorzeichenwechselstellen' der zweiten Ableitung f'' sind (Sätze (4.3), (5.2)). Nun wissen wir nach Bemerkung (5.3), daß für eine Funktion bei a ein Vorzeichenwechsel sicherlich dann vorliegt, wenn die Funktion bei a den Wert 0 hat, ihre Ableitung aber nicht! Für die Anwendungen muß man nun aber genau im Auge behalten, für welche Funktion man einen Vorzeichenwechsel feststellen will; für f oder f' oder f'' !

Beachtet man dies und kombiniert man nun (5.3) mit den Kriterien für Extrema (Satz (4.3)) bzw. für Wendestellen (Satz (5.2)), so erhält man die folgenden, häufig benutzten Kriterien:

(5.4) Satz: *Es sei f eine 2- bzw. 3-mal differenzierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- E1) *f hat bei a eine Extremstelle $\implies f'(a) = 0$.*
- E2) *$f'(a) = 0 \wedge f''(a) > 0 \implies f$ hat bei a ein Minimum.*
- E3) *$f'(a) = 0 \wedge f''(a) < 0 \implies f$ hat bei a ein Maximum.*
- W1) *f hat bei a eine Wendestelle $\implies f''(a) = 0$.*
- W2) *$f''(a) = 0 \wedge f'''(a) \neq 0 \implies f$ hat bei a eine Wendestelle.*

E1) und W1) sind wörtliche Wiederholungen von (4.3),a) bzw. (5.2),a). Für W2) beachte man, daß aus der Voraussetzung $f''(a) = 0 \wedge f'''(a) \neq 0$ nach (5.3) a) (angewendet auf die Funktion f'' !) folgt: f'' hat bei a einen Vorzeichenwechsel. Aus (5.2) b) folgt dann die Behauptung von W2).

Genauso folgen E2) und E3) mittels (5.3) b), c) (angewendet auf f') und (4.3) b).

Zum Schluß einige kritische Bemerkungen zu den im Schulbereich häufig verwendeten Kriterien E2), E3), W2) von Satz (5.4):

1. Im Falle $f'(a) = f''(a) = 0$ erlaubt (5.4) keine Entscheidung über das Vorliegen eines Extremums bei f . Dagegen ist oft ohne großen Aufwand zu erkennen, ob f' bei a einen Vorzeichenwechsel hat. Dies gilt insbesondere dann, wenn man alle Extremstellen von f bestimmen will, also ohnehin alle Nullstellen von f' bestimmen muß.

2. Gleiches gilt im Falle $f''(a) = f'''(a) = 0$ für Wendestellen.

3. Die Berechnung von f''' ist für die bisher betrachteten ganzrationalen Funktionen problemlos. Für die im nächsten Paragraphen zu behandelnden gebrochen-rationalen Funktionen dagegen kann die Berechnung einer dritten Ableitung bereits erhebliche Probleme bereiten. Dagegen erfordert die Bestimmung der Nullstellenordnung von f'' bei a einen wesentlich geringeren Aufwand. (Man braucht nur die Funktion im Zähler zu untersuchen, und diese ist *ganzrational!* Siehe dazu die Beispiele für Kurvendiskussionen rationaler Funktionen.)

Fazit: *In aller Regel ist die Untersuchung eines eventuellen Vorzeichenwechsels (bei f' bzw. f'') vorteilhafter als die unreflektierte Anwendung der Kriterien von Satz (5.4).*

§6 Weitere Ableitungsregeln

Bisher haben wir nur für ganz-rationale Funktionen Extrem- und Wendestellen bestimmt. Wir wollen nun zu den zu Beginn des dritten Semesters behandelten (gebrochen-) rationalen Funktionen zurückkehren. Alle bisherigen Überlegungen sind hier ebenfalls anwendbar, *sobald man gezeigt hat, daß auch rationale Funktionen differenzierbar sind und wie man ihre Ableitung berechnet*. Dazu dienen die folgenden Ableitungsregeln.

a. Produkt- und Quotientenregel. In §3 haben wir zunächst (Satz (3.4)) die Potenzfunktionen abgeleitet und dann in Satz (3.6) die Faktor- und Summenregel für die Ableitung kennengelernt. Schon damals haben wir gesehen, daß für die Ableitung von Produkten und Quotienten kompliziertere Regeln gelten müssen.

(6.1) Satz: Seien u und v zwei differenzierbare Funktionen.

a) (Produktregel) Ist $f = u \cdot v$ das Produkt von u und v , d. h. gegeben durch $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, so ist f differenzierbar und die Ableitung berechnet sich als wie nachfolgend angegeben:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \implies f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

b) (Quotientenregel) Ist $f = \frac{u}{v}$ der Quotient von u und v , d. h. gegeben durch $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, so ist die Funktion f (an allen Stellen ihres Definitionsbereiches) differenzierbar und die Ableitung berechnet sich wie nachfolgend angegeben:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \implies f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Merkregeln:

Ableitung eines Produktes: 'Ableitung des ersten Faktors multipliziert mit zweitem Faktor plus erster Faktor multipliziert mit der Ableitung des zweiten Faktors.'

Ableitung eines Quotienten: 'Ableitung des Zählers multipliziert mit dem Nenner minus Zähler multipliziert mit der Ableitung des Nenners, und das Ganze dividiert durch das Quadrat des Nenners.'

Als wichtige Folgerung von b) halten wir fest, daß alle rationalen Funktionen (auf ihrem Definitionsbereich) differenzierbar sind.

Beweis: a) Zum Beweis muß man den Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ berechnen und untersuchen, welchem Wert er zustrebt, wenn x gegen a strebt. Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{u(x)v(x) - u(a)v(a)}{x - a} \\ &= \frac{u(x)v(x) - u(a)v(x) + u(a)v(x) - u(a)v(a)}{x - a} \\ &= \frac{u(x)v(x) - u(a)v(x)}{x - a} + \frac{u(a)v(x) - u(a)v(a)}{x - a} \\ &= \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \cdot v(x) + u(a) \cdot \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \end{aligned}$$

Durch diese Umformungen haben wir den Differenzenquotienten von f durch die Differenzenquotienten von u und v ausgedrückt. Deren Verhalten für $x \rightarrow a$ ist bekannt, da u und v differenzierbar sind: Ihre Differenzenquotienten streben gegen den jeweiligen Ableitungswert $u'(a)$ bzw. $v'(a)$. Da für $x \rightarrow a$ die Funktionswerte $v(x)$ sich dem Wert $v(a)$ annähern, erhält man insgesamt

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a).$$

Zu b): Es sei a eine Stelle des Definitionsbereichs von f , also mit $v(a) \neq 0$. Wieder formen wir zunächst den Differenzenquotienten von f so um, daß er durch die Differenzenquotienten von u und v ausgedrückt wird. Zunächst ist

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{u(x)}{v(x)} - \frac{u(a)}{v(a)} = \frac{u(x)v(a) - u(a)v(x)}{v(x)v(a)} \\ &= \frac{1}{v(x)v(a)} \cdot (u(x)v(a) - u(a)v(x) + u(a)v(a) - u(a)v(x)) \\ &= \frac{1}{v(x)v(a)} \cdot ((u(x) - u(a))v(a) - u(a)(v(x) - v(a))), \end{aligned}$$

und nach Division durch $x - a$ erhält man

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{v(x)v(a)} \cdot \left(\frac{u(x) - u(a)}{x - a} v(a) - u(a) \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \right).$$

Berechnet man nun den Grenzwert für $x \rightarrow a$, so folgt

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{v(a)v(a)} \cdot (u'(a)v(a) - u(a)v'(a)),$$

was zu beweisen war.

Folgern Sie zur Übung aus diesen Ableitungsregeln die folgenden

(6.2) Spezialfälle: Für eine differenzierbare Funktion v bzw. eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

a)
$$f(x) = \frac{1}{v(x)} \implies f'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2},$$

b)
$$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \implies f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = (-n)x^{-n-1}.$$

Dabei bedeutet die zweite Regel, daß die alte Potenzregel $f(x) = x^n \implies f'(x) = nx^{n-1}$ auch für negative Exponenten gültig bleibt! Dies ist sehr nützlich, weil man so keine neue Regel für die Funktionen $1/x^n$ zu lernen braucht.

b. Kettenregel. Neben diesen beiden Ableitungsregeln ist schließlich noch die folgende außerordentlich wichtig:

(6.3) Satz: (Kettenregel) *Ist f die Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen g und u , also gegeben durch $f(x) = g(u(x))$, d. h. durch Einsetzung von $u(x)$ in g , so ist auch f differenzierbar und die Ableitung berechnet sich wie folgt:*

$$f(x) = g(u(x)) \implies f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Merkregel: Ableitung der Einsetzung einer ('inneren') Funktion in eine ('äußere') Funktion: 'Äußere Funktion ableiten und innere einsetzen, mal innerer Ableitung'; noch prägnanter, aber auch unpräziser: 'Äußere Ableitung mal innerer Ableitung'.

Beweis: Wir wollen den Beweis nicht in voller Allgemeinheit führen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß u bei a streng monoton ist, daß also $u(x) \neq u(a)$ angenommen werden kann. (Dies gilt für die schon früher betrachteten Funktionen mit isolierten Nullstellen der Ableitung.) Wir erhalten unter dieser Annahme

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{g(u(x)) - g(u(a))}{x - a} = \frac{g(u(x)) - g(u(a))}{u(x) - u(a)} \cdot \frac{u(x) - u(a)}{x - a}.$$

Wenn nun x gegen a strebt, so strebt der zweite Faktor gegen $u'(a)$, während im ersten Faktor ein Ausdruck der Form $\frac{g(z) - g(b)}{z - b}$ steht mit $z = u(x)$ und $b = u(a)$. Strebt x gegen a , so strebt $u(x)$ gegen $u(a)$, d. h. z strebt gegen b . Wenn aber z gegen b strebt, so strebt der Differenzenquotient $\frac{g(z) - g(b)}{z - b}$ gegen den Ableitungswert $g'(b) = g'(u(a))$. Also:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(u(a)) \cdot u'(a).$$

Beweisen Sie zur Übung die nachfolgende Konsequenz der Produkt- und Kettenregel:

(6.4) Folgerung: a) *Es sei $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, $n \neq 0$ und $f(x) = (x - c)^n g(x)$ mit einer differenzierbaren Funktion g . Dann ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = (x - c)^{n-1}(ng(x) + g'(x)(x - c))$.*

b) *Ist c eine Nullstelle der Ordnung $n \geq 2$ von f , so hat f' bei c eine Nullstelle der Ordnung $n - 1$.*

Zum *Beweis* von a) folgern wir zunächst aus der Ketten- und allgemeinen Potenzregel (6.2), b), daß $(x - c)^n$ als Ableitung die Funktion $n(x - c)^{n-1}$ hat (die Ableitung der inneren Funktion $x - c$ ist 1!). Mit der Produktregel folgt dann

$$f'(x) = n(x - c)^{n-1} \cdot g(x) + (x - c)^n \cdot g'(x) = (x - c)^{n-1}(ng(x) + (x - c)g'(x)).$$

Für den Beweis von b) wiederhole man zunächst die Definition der Nullstellenordnung (§1, (1.5)). Ist c eine Nullstelle von f von der Ordnung $n \geq 2$, so gilt gemäß dieser Definition $g(c) \neq 0$. (Andernfalls könnte man noch weitere Faktoren $(x - c)$ aus $f(x)$ abspalten.) Dann folgt nach a) $f'(x) = (x - c)^{n-1} \cdot h(x)$, wobei wir abkürzend $h(x) = ng(x) + (x - c)g'(x)$ schreiben. Wegen $h(c) = ng(c) + 0 \cdot g'(c) = ng(c) \neq 0$ hat dann $f'(x) = (x - c)^{n-1}h(x)$ bei c eine Nullstelle der genauen Ordnung $n - 1$.

Aus a) kann man auch eine zu b) analoge Aussage für Pole herleiten. Wie müßte diese lauten? Beweisen Sie sie dann.

§7 Kurvendiskussion rationaler Funktionen

Die Kurvendiskussion einer rationalen Funktion f umfaßt die Bestimmung

- der Definitionslücken
 - und die Entscheidung, welche davon Polstellen und welche hebbare Lücken sind,
 - der Ersatzfunktion \tilde{f} ,
 - der Nullstellen von f ,
 - der Asymptoten (Schmiegegeraden),
 - der Extremstellen, Hoch- und Tiefpunkte,
 - der Wendestellen und Wendepunkte,
- sowie eine Skizze des Graphen von f .

1. Beispiel: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1}$

1) Nullstellen des Nenners: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ hat $+1$ als einzige, doppelte Nullstelle. Damit ist $+1$ einzige Definitionslücke von f .

2) Nullstellen des Zählers: $x + 1$ hat als einzige Nullstelle -1 .

Da die Lücke $+1$ keine Nullstelle des Zählers ist, hat f bei $+1$ einen Pol. -1 ist die einzige Nullstelle von f . Bei 0 nimmt f den Wert $f(0) = 1$ an. (Dies ist der y -Achsenabschnitt.)

3) Der Zählergrad ist echt kleiner als der Nennergrad, daher ist die x -Achse eine Asymptote.

4) Mit der Quotientenregel erhält man als Ableitung von $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ gerade

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - (x+1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

und nach Kürzen mit $(x-1)$

$$f'(x) = \frac{x-1-2(x+1)}{(x-1)^3} = \frac{-x-3}{(x-1)^3}.$$

Man sieht: Zähler und Nenner von f' haben keine gemeinsamen Nullstellen. Einzige Nullstelle von f' ist die Nullstelle des Zählers, nämlich -3 . Diese ist von ungerader Ordnung, also hat f' bei -3 einen Vorzeichenwechsel und f eine Extremstelle. Nun ist für $x < -3$ der Zähler von f' positiv und der Nenner negativ, so daß f' bei -3 einen Vorzeichenwechsel von $'-'$ nach $'+'$ hat. Das Extremum von f bei -3 ist daher ein Minimum. Der Tiefpunkt T hat die Koordinaten $(-3|f(-3)) = (-3|-\frac{1}{8})$.

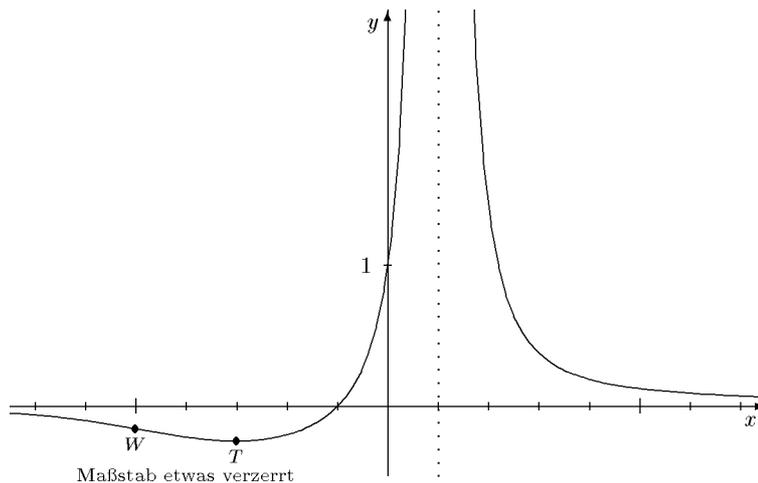
5) Die zweite Ableitung könnte man wieder mit der Quotientenregel berechnen (Kürzen nicht vergessen!). Alternativ kann man die Produkt- und Kettenregel benutzen und erhält aus $f'(x) = -(x+3)(x-1)^{-3}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(x-1)^{-3} + [-(x+3)] \cdot (-3)(x-1)^{-4} \\ &= (x-1)^{-4} \cdot (-(x-1) + 3(x+3)) \\ &= \frac{2x+10}{(x-1)^4}. \end{aligned}$$

Zähler und Nenner von f'' haben keine Nullstelle gemeinsam; -5 ist einzige Nullstelle des Zählers von f'' , und zwar von erster Ordnung. Also hat f'' bei -5 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel und daher ist -5 eine Wendestelle von f .¹⁾ Die Koordinaten des Wendepunktes W sind $(-5|f(-5)) = (-5|-\frac{1}{9})$.

¹⁾ Dies ist eines dieser bereits auf S. 22 angesprochenen typischen Beispiele, bei denen es einfacher ist, einen Vorzeichenwechsel zu erkennen, also noch ein weiteres, drittes (!) Mal abzuleiten.

Skizze:



2. Beispiel: $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - 4}$

1) Nullstellen des Nenners: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ hat -2 und $+2$ als einzige Nullstellen, und zwar von erster Ordnung. Die Definitionslücken von f sind -2 und $+2$.

2) Nullstellen des Zählers: $x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6)$ hat neben 0 noch die Nullstellen 2 und -3 (p, q -Formel). Also gilt

$$f(x) = \frac{x(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x(x+3)}{x+2}.$$

Wir erkennen, daß $+2$ eine hebbare Lücke von f ist, während -2 eine Polstelle ist, und zwar mit Vorzeichenwechsel. Wir arbeiten nun mit der Ersatzfunktion

$$\tilde{f}(x) = \frac{x(x+3)}{x+2}$$

weiter. Nullstellen von \tilde{f} sind 0 und -3 , jeweils von erster Ordnung, also jeweils mit Vorzeichenwechsel.

3) Der Zählergrad ist um 1 größer als der Nennergrad, also besitzt f eine Asymptote. Diese bestimmt man, indem man den Zähler $x^2 + 3x$ (der Ersatzfunktion) durch den Nenner $x + 2$ mit Rest dividiert. Man erhält $(x^2 + 3x) : (x + 2) = x + 1$ Rest -2 , also

$$\frac{x^2 + 3x}{x + 2} = x + 1 + \frac{-2}{x + 2}.$$

Damit ist die Gerade mit der Gleichung $y = x + 1$ als Asymptote ermittelt.

4) Zur Berechnung der Ableitung von \tilde{f} benutzen wir die Darstellung aus 3) $\tilde{f}(x) = x + 1 - 2(x + 2)^{-1}$. Wir erhalten als Ableitung

$$\tilde{f}'(x) = 1 - 2 \cdot (-1)(x + 2)^{-2} = 1 + \frac{2}{(x + 2)^2}.$$

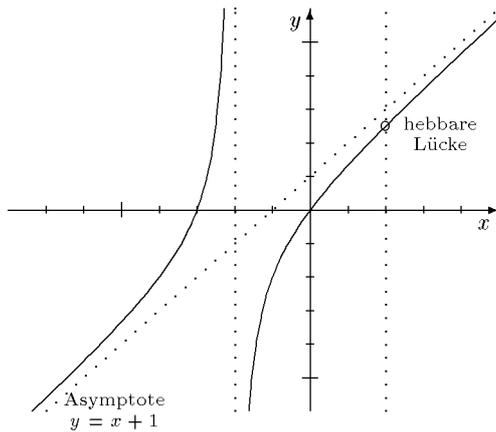
Wir erkennen unmittelbar, daß f' nur Werte ≥ 1 annimmt, also insbesondere keine Nullstelle hat. f hat daher also kein Extremum.

5) Von $\tilde{f}'(x) = 1 + 2(x + 2)^{-2}$ ausgehend erhalten wir

$$\tilde{f}''(x) = -4(x + 2)^{-3}.$$

Auch \tilde{f}'' hat keine Nullstelle, f also keinen Wendepunkt.

Skizze:



3. Beispiel: $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - x - 2}$

- 1) Nullstellen des Nenners: $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$ (p, q -Formel) hat $+2$ und -1 als einzige Nullstellen.
- 2) Nullstelle des Zählers $x - 2$ ist offensichtlich nur 2 . Dies ergibt

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{x - 2}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{1}{x + 1}.$$

Damit ist $+2$ eine hebbare Lücke, -1 ein Pol von f mit Vorzeichenwechsel und die Ersatzfunktion \tilde{f} gegeben durch $1/(x + 1)$. f hat keine Nullstellen.

[Nun entsteht der Term $1/(x + 1)$, indem man $x + 1$ in den Term $1/x$ einsetzt. Dies bedeutet, daß der Graph von $1/(x + 1)$ aus dem bekannten Graphen von $1/x$ durch eine Verschiebung in x -Richtung entsteht, und zwar durch eine Verschiebung um -1 , d. h. um 1 Einheit nach links. Damit ist eine Skizze des Graphen von f unmittelbar möglich.]

Wir wollen dennoch unsere allgemeinen Methoden anwenden (zur Übung).

3) Da der Zählergrad von f kleiner ist als der Nennergrad, ist die x -Achse Asymptote an den Graphen von f .

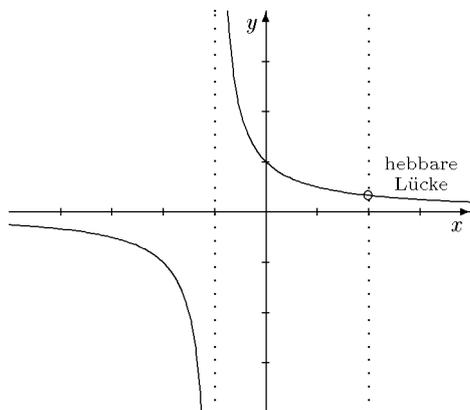
4/5) Ausgehend von $\tilde{f}(x) = 1/(x + 1) = (x + 1)^{-1}$ erhalten wir

$$\tilde{f}'(x) = (-1)(x + 1)^{-2} = \frac{-1}{(x + 1)^2}, \quad \text{und}$$

$$\tilde{f}''(x) = (-1)(-2)(x + 1)^{-3} = \frac{2}{(x + 1)^3}.$$

Damit haben weder \tilde{f}' noch \tilde{f}'' Nullstellen, \tilde{f} also weder Extrem- noch Wendestellen. Außerdem erkennen wir, daß \tilde{f}' nur negative Werte annimmt und die Funktion \tilde{f} daher stets fällt.

Skizze:



4. Beispiel: $f(x) = \frac{x^2 + 7}{x - 3}$

1/2) $+3$ ist einzige Nullstelle des Nenners, der Zähler ist nullstellenfrei (weil alle Werte positiv sind). Damit ist $+3$ Pol von f mit Vorzeichenwechsel. f hat keine hebbaren Lücken und keine Nullstellen.

3) Der Zählergrad von f ist um 1 größer als der Nennergrad, also gibt es eine Asymptote. Durch Polynomdivision erhält man

$$f(x) = \frac{x^2 + 7}{x - 3} = x + 3 + \frac{16}{x - 3}.$$

Damit ist die Gerade mit der Gleichung $y = x + 3$ Asymptote für den Graphen von f .

4/5) Wir benutzen diese umgeformte Darstellung $f(x) = x + 3 + 16(x - 3)^{-1}$ zur Berechnung der Ableitungen und erhalten

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 16 \cdot (-1)(x - 3)^{-2} = 1 - 16(x - 3)^{-2}, \\ f''(x) &= -16 \cdot (-2)(x - 3)^{-3} = 32(x - 3)^{-3}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Nullstellen schreiben wir die Ableitungsterme wieder als Brüche:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{16}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 3)^2 - 16}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 6x + 9 - 16}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 7}{(x - 3)^2}, \\ f''(x) &= 32(x - 3)^{-3} = \frac{32}{(x - 3)^3}. \end{aligned}$$

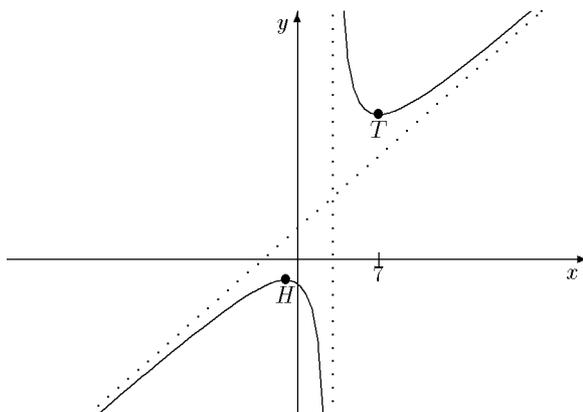
Offensichtlich hat f'' keine Nullstellen, f also keine Wendestellen.

Zur Berechnung der Nullstellen von f' muß man die Nullstellen des Zählers $x^2 - 6x - 7$ bestimmen. Hier läßt sich erneut die in Fußnote ²⁾ beschriebene Methode anwenden: Wir zerlegen $-7 = 1 \cdot (-7)$ oder $-7 = (-1) \cdot 7$. Im ersten Falle ist die Summe der Faktoren $1 - 7 = -6$ und wir finden: $x^2 - 6x - 7 = (x + 1)(x - 7)$. Die Nullstellen des Zählers von f' sind also -1 und $+7$, beide von erster Ordnung. Da sie von der Nullstelle des Nenners verschieden sind, hat f' an beiden Stellen eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, f dort also Extremstellen. Genauer entnehmen wir aus

$$f'(x) = \frac{(x + 1)(x - 7)}{(x - 3)^2},$$

daß f' bei -1 sein Vorzeichen von '+' nach '-' wechselt und bei $+7$ umgekehrt. Damit hat f bei -1 ein lokales Maximum und bei 7 ein lokales Minimum. Die Koordinaten des einzigen Hochpunktes H sind $(-1 \mid f(-1)) = (-1 \mid -2)$, während der einzige Tiefpunkt T die Koordinaten $(7 \mid f(7)) = (7 \mid 14)$ hat.

Skizze:

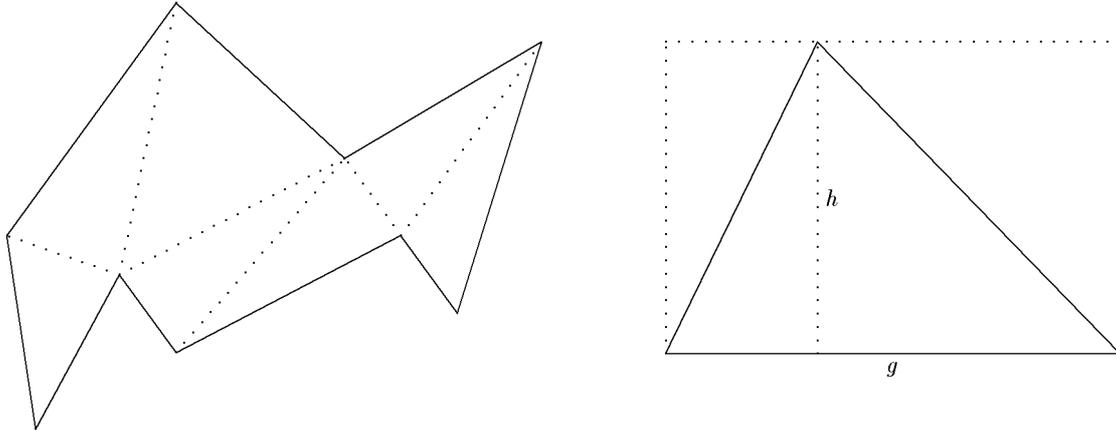


III. Integralrechnung

Gegenstand der Integralrechnung ist das uralte Problem der Berechnung von Flächeninhalten und Volumina. Aber auch Bogenlängen werden mit Hilfe der Integralrechnung ermittelt.

§8 Vom Flächeninhalt zum Integral

a. Grundprinzipien der Flächenberechnung. Die Flächenberechnung stellt kein großes Problem dar, solange die Flächenstücke geradlinig begrenzt sind: Man kann sie in Dreiecke ‘zerschneiden’ und Dreiecksflächen kann man nach der Formel *Fläche gleich Grundlinie mal Höhe durch 2* berechnen. Diese Formel wiederum erhält man dadurch, daß man ein beliebiges Dreieck mittels einer Höhe in zwei



rechtwinklige Dreiecke zerlegt und diese durch geeignete Verdopplung zu Rechtecken ergänzt. Insgesamt erhält man so ein Gesamtrechteck, das doppelt so groß ist wie das gegebene Dreieck. Die Fläche dieses Rechtecks ist das Produkt $g \cdot h$ der Kantenlängen. Die Hälfte davon ist dann die Dreiecksfläche.

In diesen kurzen Bemerkungen sind schon die elementarsten Eigenschaften des Flächeninhalts angesprochen:

1. Rechtecksfläche = Produkt der Kantenlängen. (Dies ist im Kern die Definition des Flächeninhalts.)
2. Zerschneidet man Flächenstücke, so addieren sich die Einzelflächeninhalte zum Gesamtflächeninhalt.
3. Deckungsgleiche (kongruente) Flächenstücke haben denselben Flächeninhalt.

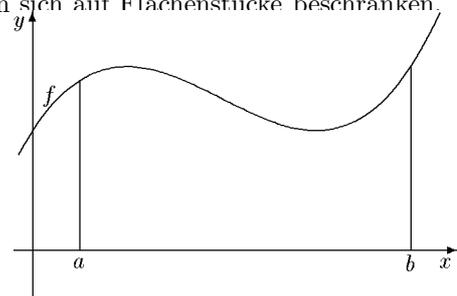
Schließlich wollen wir noch eine weitere, ebenso offensichtliche Eigenschaft formulieren, die aber für das folgende auch ebenso fundamental ist:

4. Liegt ein Flächenstück vollständig in einem anderen, so ist sein Flächeninhalt höchstens so groß wie der des umfassenderen Flächenstücks.

Diese vier Eigenschaften sind die Grundregeln über Flächeninhalte, auf denen die nachfolgenden Überlegungen basieren. Sie sind hier explizit formuliert, um die Fundamente deutlich offen zu legen. Zugleich sollen dies die einzigen Eigenschaften sein, die wir über Flächeninhalte verwenden werden.

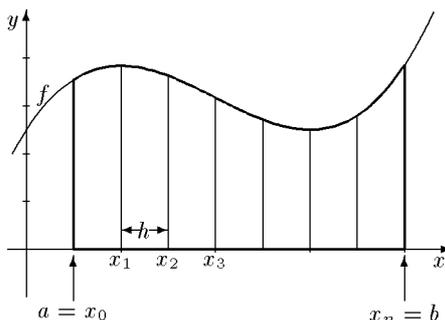
b. Ober- und Untersummen. Das eigentliche Problem ist die Flächenberechnung für *krümmelig begrenzte* Flächenstücke. Durch geeignetes Zerschneiden kann man sich auf Flächenstücke beschränken, die wie skizziert zwischen dem Graphen einer Funktion und der x -Achse liegen und seitlich durch Parallelen zur y -Achse begrenzt sind. Dabei soll der Graph ein *zusammenhängendes* Kurvenstück sein. Mit a und b bezeichnen wir die Lage der seitlichen Begrenzungen und es sei $a < b$. Diese Bezeichnungen werden wir im folgenden stets verwenden.

Da man krümmelig begrenzte Flächenstücke nicht in Rechtecke (oder allgemeiner, in geradlinig begrenzte Flächenstücke) zerlegen kann, versucht man den Flächeninhalt zunächst *anzunähern*, indem man das Flächenstück durch Rechtecke auszuschöpfen versucht und dann den Fehler untersucht. Diese Methode des *Ausschöpfens* wurde bereits von *Archimedes* zur Bestimmung der Kreisfläche und damit der Zahl π verwendet.



Das folgende, systematische Vorgehen geht auf den Mathematiker Bernhard Riemann (1826–1866) zurück. Gegeben ist eine Funktion f (deren Graph die *Randkurve* des Flächenstücks bildet) sowie ein Intervall $J = [a, b]$ ($a < b$), wodurch die anderen geradlinigen Berandungen gegeben sind (siehe die obige Skizze). Wir unterteilen das uns interessierende Flächenstück in n (schmale) Streifen, wobei n irgendeine natürliche Zahl ist. Der Einfachheit halber wählen wir gleich breite Streifen. Die folgende Skizze

veranschaulicht ein Beispiel einer solchen Zerlegung in gleich lange Teilintervalle. Die interessierende Gesamtfläche ist mit dickerer Strichstärke umrandet.



Wir bezeichnen die Streifenbreite mit h ; bei n gleich breiten Streifen berechnet sie sich wie folgt:

$$\text{Streifenbreite: } h = \frac{b - a}{n}.$$

Für spätere Zwecke bezeichnen wir die einzelnen Zerlegungstellen des Integrationsintervalls mit x_0, x_1, \dots, x_n (siehe Skizze). Da die Streifen jeweils die Breite h haben, erhält man ausgehend von $x_0 = a$ die Zerlegungsstellen $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, $x_3 = a + 3h \dots$, bzw. allgemein

$$x_k = a + k \cdot h \text{ für } k = 0, \dots, n.$$

Dabei ist dann $x_n = a + n \cdot h = a + n \cdot \frac{b-a}{n} = a + (b - a) = b$ — wie in der Skizze bereits vermerkt.

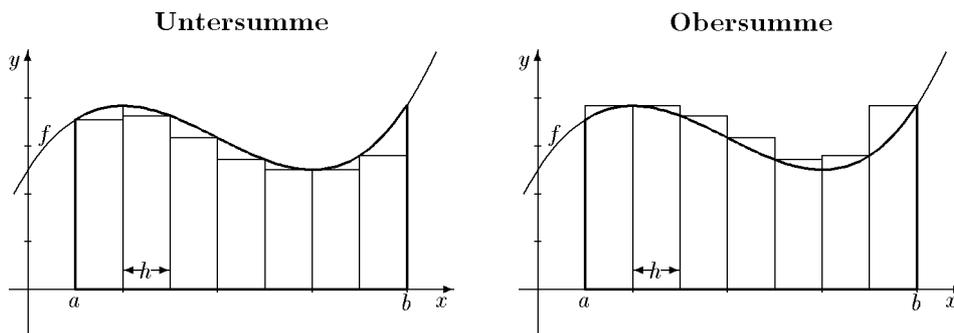
Man versucht nun den Flächeninhalt einzuschachteln durch die sog. Ober- und Untersummen.

Untersummen: Man bildet aus jedem Streifen ein Rechteck, dessen obere Begrenzung möglichst hoch, aber ganz *unterhalb* des Graphen bleibt, so daß also sämtliche Rechtecke zusammen vollständig im dick umrandeten Flächenstück enthalten sind (siehe nachfolgende Skizze). Die Höhe des jeweiligen Rechtecks wird bestimmt durch den *kleinsten* Wert, den die Funktion f in dem entsprechenden Streifen annimmt. Die Fläche eines jeden solchen Rechtecks ist daher das Produkt

$$h \cdot (\text{kleinster Funktionswert im jeweiligen Streifen}).$$

Die Summe der Flächeninhalte der so gebildeten n Rechtecke ist dann die sog. *Untersumme* $U_n(f)$ von f zu n gleich breiten Streifen. Indem man den einheitlichen Faktor h ausklammert erhält man die folgende Definition der Untersumme $U_n(f)$:

$$U_n(f) = h \cdot \left(\begin{array}{l} \text{Summe der jeweils kleinsten} \\ \text{Funktionswerte in den } n \text{ Streifen} \end{array} \right).$$



Obersummen: Hier geht man analog vor, nur bildet man nun aus jedem Streifen ein Rechteck, dessen obere Begrenzung möglichst tief, aber ganz oberhalb des Graphen liegt (siehe obige Skizze rechts). Die Höhe des jeweiligen Rechtecks wird also bestimmt durch den *größten* Wert, den die Funktion f im Bereich des entsprechenden Streifens annimmt. Die Summe der so gebildeten n Rechtecksflächen ist dann die sog. *Obersumme* $O_n(f)$ von f zu n gleich breiten Streifen:

$$O_n(f) = h \cdot \left(\begin{array}{l} \text{Summe der jeweils größten} \\ \text{Funktionswerte in den } n \text{ Streifen} \end{array} \right).$$

Aufgrund dieser Definition und den einleitend genannten Grundprinzipien jeglicher Flächenberechnung (insbesondere der so selbstverständlichen Eigenschaft 4.) gilt nun die folgende Beziehung für den gesuchten Flächeninhalt A des dick umrandeten Flächenstücks in obiger Skizze.

$$\boxed{U_n(f) \leq A \leq O_n(f) \quad \text{für beliebige Streifenzahl } n.}$$

Diese Beziehung bedeutet eine *Einschachtelung* des gesuchten Flächeninhalts A zwischen explizit berechenbare Werte.

c. Der Grenzübergang. Die oben gefundene *Einschachtelung* führt zu einer *präzisen* Bestimmung des gesuchten Wertes A , wenn der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme $O_n(f) - U_n(f)$ bei wachsender Streifenzahl n sich dem Wert 0 beliebig annähert.

Für monotone Funktionen können wir den *maximalen Fehler*, d. i. der Unterschied $O_n(f) - U_n(f)$ zwischen Ober- und Untersumme, explizit berechnen und erkennen, daß er bei wachsender Streifenzahl tatsächlich beliebig klein wird.

Satz: *Ist die Funktion f über dem gesamten Intervall $[a, b]$ definiert und monoton steigend, so gilt:*

$$O_n(f) - U_n(f) = \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)).$$

Für monoton fallendes f gilt entsprechend

$$O_n(f) - U_n(f) = \frac{b-a}{n} \cdot (f(a) - f(b)).$$

In jedem Falle strebt dies gegen 0 für $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (O_n(f) - U_n(f)) = 0.$$

Beweis: Es genügt die erste Formel zu beweisen, denn dann strebt $O_n(f) - U_n(f)$ gegen 0, da bei wachsendem n der Nenner beliebig groß wird und alle anderen Größen aber konstant sind. Der Wert des Bruches strebt dann natürlich gegen 0.

Wir führen den Beweis für eine Funktion f , die über dem Intervall $[a, b]$ monoton wächst. Dies bedeutet, daß in jedem Streifen der kleinste Funktionswert am linken Rand und der größte Wert am rechten Rand erreicht wird. Damit erhalten wir

$$U_n(f) = h(f(x_0) + \dots + f(x_{n-1})) \quad \text{und} \quad O_n(f) = h(f(x_1) + \dots + f(x_n)),$$

wobei x_0, \dots, x_n die Zerlegungsstellen des Intervalls sind (siehe die Skizze auf S. 30). Als Differenz ergibt sich somit

$$\begin{aligned} O_n(f) - U_n(f) &= h \cdot \left(\begin{array}{c} f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n) \\ - f(x_0) - f(x_1) - f(x_2) - \dots - f(x_{n-1}) \end{array} \right) \\ &= h \cdot (f(x_n) - f(x_0)) = h \cdot (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Für eine monoton fallende Funktion erhält man entsprechend

$$O_n(f) - U_n(f) = h \cdot (f(a) - f(b)).$$

Da die Untersummen bei Verdopplung der Streifenzahl wachsen, die Obersummen abnehmen, ihr Unterschied aber beliebig klein wird, streben Unter- und Obersumme gegen denselben Grenzwert. Da für alle n $U_n(f) \leq A \leq O_n(f)$ gilt, muß der gemeinsame Grenzwert gerade der gesuchte Flächeninhalt sein:

$$\boxed{A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n(f).}$$

Diese letztgenannte Beziehung bleibt aber nur solange richtig, wie $a < b$ ist und die Funktion f keine negativen Werte hat!

§9 Das Integral

a. Definition und geometrische Deutung. Man definiert nun ganz allgemein (ohne die in §1 unterstellten Voraussetzungen $a < b$, f monoton und mit positiven Werten):

Definition: Es sei f eine über einem Intervall J lückenlos definierte Funktion und $a, b \in J$.

Man nennt f *integrierbar* in den Grenzen von a bis b , wenn Ober- und Untersummen denselben Grenzwert haben:

$$f \text{ integrierbar} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n(f).$$

Und für eine integrierbare Funktionen definiert man dann das *Integral von f in den Grenzen von a bis b* als den gemeinsamen Grenzwert von Ober- und Untersummen:

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n(f).$$

Da Funktionen f meist durch einen Funktionsterm $f(x)$ angegeben sind, führt man eine weitere Schreibweise für das Integral ein:

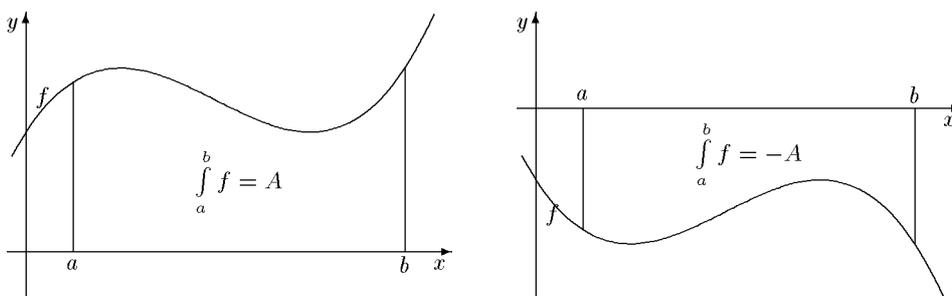
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f.$$

Es sei aber nochmals betont, daß die Definition des Integrals nur möglich ist, wenn die Funktion über dem gesamten Integrationsintervall definiert ist! Es darf also *keine Definitionslücke* im Integrationsintervall liegen!

Die Vorüberlegungen in §1 zeigen, daß monotone Funktionen integrierbar sind und daß das Integral gleich dem Inhalt des oben skizzierten Flächenstücks zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x -Achse in den Grenzen von a bis b ist: $A = \int_a^b f$. Diese geometrische Deutung bleibt aber nur solange richtig, wie $a < b$ ist und die Funktion f keine negativen Werte hat!

Hat dagegen f negative Werte, so werden die Produkte $h \cdot f(x_k)$ negativ, während der Flächeninhalt des entsprechenden Rechtecks positiv ist. Dies hat zur Folge, daß bei einer Funktion f , die nur negative Werte annimmt, auch das Integral $\int_a^b f$ negativ ist, und zwar gibt es dann gerade das *Negative* des Flächeninhalts A an: $\int_a^b f = -A$.

Flächeninhalte sind immer positiv, Integrale können auch negativ sein!



Bemerkung: (Geometrische Deutung des Integrals) Es sei f eine Funktion über dem Intervall $[a, b]$, $a < b$, und A der Inhalt der Fläche zwischen der x -Achse und dem Graphen von f in den Grenzen von a bis b . Unter der Voraussetzung, daß die Funktionswerte von f im Integrationsintervall $[a, b]$ ein einheitliches Vorzeichen haben, ist das Integral $\int_a^b f$ gleich dem Flächeninhalt A , versehen mit dem entsprechenden Vorzeichen von f .

$$\int_a^b f = \begin{cases} +A & \text{falls } f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a, b], \\ -A & \text{falls } f(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in [a, b]. \end{cases}$$

Liegt das Flächenstück unter der x -Achse, wird der Integralwert negativ, andernfalls positiv. Das Integral ist also ein *mit einem Vorzeichen versehener Flächeninhalt*, man sagt ein *orientierter Flächeninhalt*. Das Integral 'registriert' die Lage des Flächenstücks ober- oder unterhalb der x -Achse.

Das Integral ist ein *orientierter* Flächeninhalt.

b. Erste Integrationsregeln. Ein ähnliches Phänomen der Vorzeichenumkehr ergibt sich, wenn nicht wie bisher $a < b$ ist, sondern umgekehrt. Vertauscht man die Rollen von a und b , so ändert die ‘Streifenbreite’ $h = \frac{b-a}{n}$ ihr Vorzeichen. Für das Integral bedeutet dies dann eine Vorzeichenänderung:

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

Für den Fall $a = b$ ergibt sich schließlich die ‘Streifenbreite’ $h = 0$ und damit dann (in voller Übereinstimmung mit der geometrischen Anschauung):

$$\int_a^a f = 0.$$

Als eine weitere wichtige Integraleigenschaft formulieren wir die sog.

Intervalladditivität: Ist f eine über dem Intervall J integrierbare Funktion und sind a, b, c beliebige Stellen in J , so gilt:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

Dieser Sachverhalt ist für $a < b < c$ und eine Funktion f mit positiven Werten geometrisch unmittelbar einsichtig, aber auch aufgrund der obigen Definition des Integrals *nachweisbar*. (Allerdings muß man dann auch Unterteilungen in Streifen unterschiedlicher Breite zulassen.)

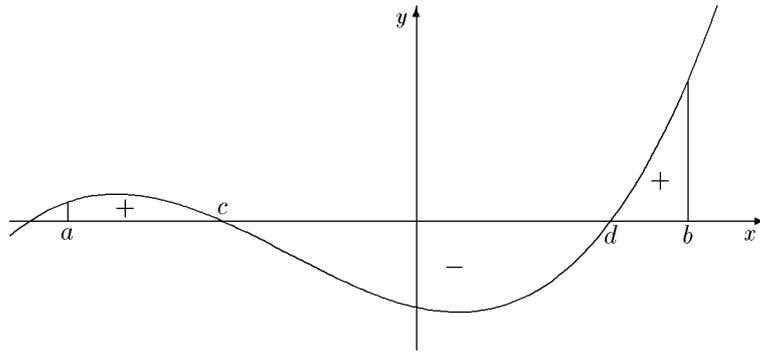
Eine erste Folge der Intervalladditivität ist, daß man nicht nur monotone Funktionen integrieren kann, sondern alle Funktionen die *abschnittsweise* monoton sind: Man unterteilt das Integrationsintervall einfach in die Teilabschnitte, in denen die Funktion f monoton ist. In diesen Teilbereichen ist die Funktion integrierbar, also aufgrund der Intervalladditivität auch insgesamt:

Abschnittsweise monotone Funktionen sind integrierbar.

Zu dieser Funktionenklasse gehören alle Funktionen, die Sie bisher im Unterricht genauer kennengelernt haben (ganz-rationale, rationale Funktionen), denn diese Funktionen haben nur endlich viele Extremstellen. In den Abschnitten dazwischen sind diese Funktionen monoton und folglich integrierbar.

Man kann nun mit der Intervalladditivität die geometrische Deutung des Integrals aus Abschnitt a. ausweiten auf Funktionen, die im Integrationsintervall ihr Vorzeichen *ändern*. Man unterteilt in diesem Fall das Intervall $J = [a, b]$ an den Nullstellen von f und erhält so mehrere Flächenstücke zwischen Graph und x -Achse. Das Integral ist dann die Summe der einzelnen Teilintegrale. Diese wiederum sind gemäß

a. gleich den mit Vorzeichen versehenen Flächeninhalten. Im skizzierten Beispiel ist



$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f = +A_1 - A_2 + A_3,$$

wenn A_1, A_2, A_3 die Flächeninhalte der einzelnen Teilflächenstücke sind.

c. Erste Integralberechnungen entsprechend der Definition. Die einfachste Funktion mit nicht geradlinigem Graphen ist $f(x) = x^2$. Wir wollen dafür Integralwerte auf der Basis der Definition berechnen. Zur Vereinfachung wählen wir als untere Integrationsgrenze $a = 0$, während die obere Grenze b eine beliebige positive Zahl sei. Da f stückweise monoton ist, ist f auch integrierbar. Definitionsgemäß müssen wir daher zunächst für beliebiges n die Obersumme (oder auch Untersumme) berechnen und dann den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ bestimmen.

Gegeben sind:

1. die Funktion f durch $f(x) = x^2$,
2. die Integrationsgrenzen $a = 0$ und $b > 0$ und
3. die Streifenanzahl n .
4. Dann ist die Streifenbreite $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b}{n}$ und
5. die Begrenzungsstellen der Streifen sind $x_k = a + k \cdot h = k \cdot h$.

Zur Berechnung der Obersumme muß man in den n Streifen den jeweils größten Funktionswert bestimmen und diese aufsummieren. Da die Funktion f im betrachteten Intervall $J = [0, b]$ monoton wächst, wird der größte Funktionswert jeweils an der rechten Begrenzungsstelle des Streifens erreicht, also ist $f(x_k)$ der größte Funktionswert im k -ten Streifen ($k = 1, 2, \dots, n$). Nun ist $f(x_k) = f(kh) = (kh)^2$, so daß man die folgende Darstellung für die Obersumme erhält:

$$\begin{aligned} O_n(f) &= h \cdot (\text{Summe von } (kh)^2 \text{ für } k = 1, \dots, n) \\ &= h \cdot ((1h)^2 + (2h)^2 + \dots + (nh)^2) \\ &= h^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \end{aligned}$$

Die Obersumme ist also das Produkt aus der dritten Potenz der Streifenbreite und der Summe der ersten n Quadratzahlen. Mit wachsendem n wird diese Summe natürlich unbegrenzt wachsen, zugleich wird aber die Streifenbreite $h = \frac{b}{n}$ und damit auch h^3 gegen 0 streben. Welchem Wert dann das Produkt zustrebt ist, zunächst nicht erkennbar.

Hier hilft nun eine wichtige *Summationsformel* weiter, die es gestattet, die Summe der ersten n Quadratzahlen unmittelbar zu bestimmen. Sie lautet:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Diese Summationsformel (siehe Lehrbuch Analysis 2, S. 12, Aufgabe 4) können wir hier mit unseren Mitteln nicht beweisen. Wir wollen uns aber ihre Bedeutung klar machen: Während man zur Bestimmung der Summe der ersten 1000 Quadratzahlen zunächst 1000 Quadrate berechnen und dann 999 Summationen ausführen muß (1999 Rechenschritte), liefert die rechte Seite der obigen Formel das Ergebnis mit 2 Additionen, 3 Multiplikationen und einer Division durch 6! Der Vorteil dieser Summationsformel ist somit deutlich erkennbar.

Über diesen rein rechnerischen Vorteil hinaus ermöglicht uns diese Summenformel die Bestimmung des Grenzwertes der Obersummen im eben diskutierten Fall. Zunächst ergibt sich aus dieser Summenformel (man beachte $h = \frac{b}{n}$)

$$O_n(f) = h^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

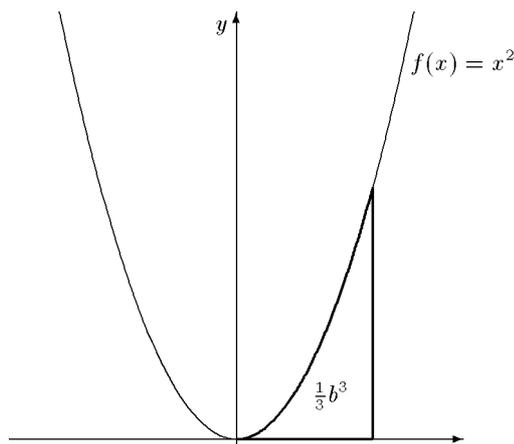
Dies zeigt, daß $O_n(f)$ eine *rationale* Funktion von n ist (b ist konstant). Wie man für rationale Funktionen das Verhalten im Unendlichen ermittelt, haben wir in I §2 b. besprochen:¹⁾ Stimmen bei einer rationalen Funktion Zähler- und Nennergrad überein, so hat die Funktion einen Grenzwert im Unendlichen und dieser ist durch den Quotienten der führenden Koeffizienten gegeben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3 \cdot (2n^2 + 3n + 1)}{6n^2} = \frac{b^3 \cdot 2}{6} = \frac{1}{3}b^3.$$

Durch diese Grenzwertberechnung haben wir die erste Integrationsformel hergeleitet:

$$\boxed{\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3.}$$

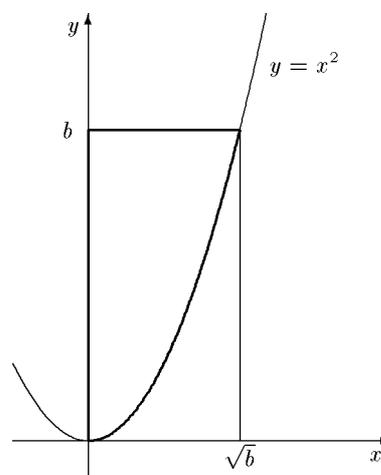
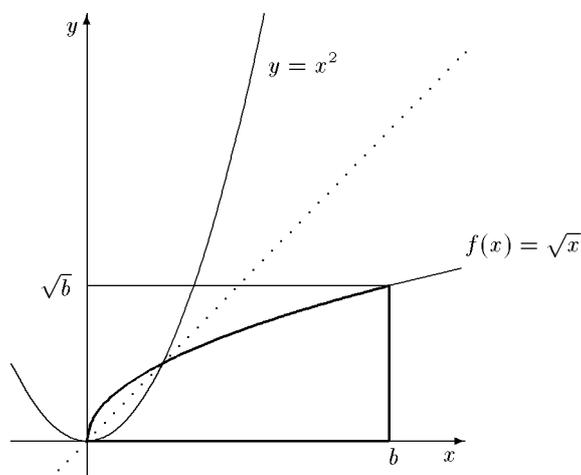
Diese Integrationsformel gibt zugleich den *Flächeninhalt* des Flächenstücks zwischen der Standardparabel ($y = x^2$) und der x -Achse in den Grenzen von $a = 0$ bis b an (siehe Skizze). In ähnlicher Weise kann man auch für andere Funktionen f vorgehen, etwa für $f(x) = x^3$. Bei Kenntnis entsprechender Summenformeln kommt man zu ähnlichen Ergebnissen.



d. Weitere Berechnungen mittels geometrischer Überlegungen. Mit dieser ersten Integrationsformel erhält man durch geeignete geometrische Überlegungen auch solche für damit verwandte andere Funktionen, etwa die Wurzelfunktion:

$$\boxed{\int_0^b \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{b^3}.$$

Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist die Umkehrung des Quadrierens, daher ist der Graph spiegelsymmetrisch zur Normalparabel (mit der Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten als Spiegelachse, siehe nachfolgende Skizze). Das gesuchte Integral $\int_0^b \sqrt{x} dx$ ist der Flächeninhalt des dick umrandeten Flächenstücks zwischen Graph und x -Achse in der linken Skizze.



¹⁾ Nur daß jetzt hier die Variable n und nicht x heißt.

Wegen der genannten Symmetrie sind die dick umrandeten Flächenstücke in den beiden Skizzen deckungs- und damit auch flächengleich. Der Inhalt des in der rechten Skizze *oberhalb* der Normalparabel liegenden Flächenstücks ergibt sich aus der Rechtecksfläche $\sqrt{b} \cdot b$ vermindert um den Inhalt des *unter* der Parabel liegenden Flächenstücks, der nach obiger Formel durch $\frac{1}{3}(\sqrt{b})^3$ gegeben ist. Damit ist die gesuchte Fläche

$$\sqrt{b} \cdot b - \frac{1}{3}\sqrt{b}^3 = \sqrt{b}^3 - \frac{1}{3}\sqrt{b}^3 = \frac{2}{3}\sqrt{b}^3.$$

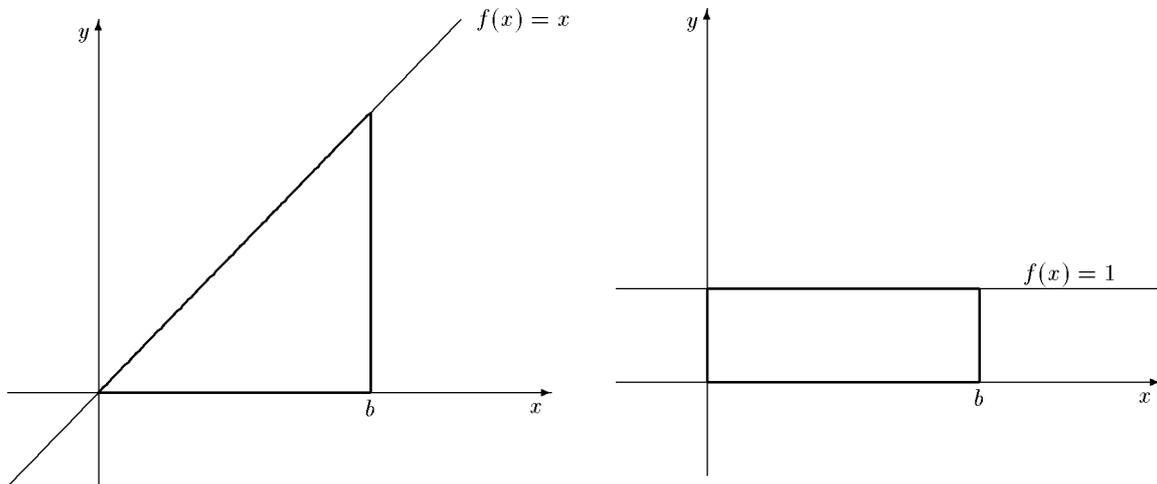
Damit ist die behauptete Integrationsformel für die Wurzelfunktion bewiesen.

Allein durch geometrische Überlegungen erhält man außerdem die folgenden Integrationsformeln:

$$\int_0^b x \, dx = \frac{1}{2}b^2.$$

$$\int_0^b 1 \, dx = b.$$

Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus den folgenden beiden Skizzen und den wohlbekannten Flächenformeln für Dreiecke und Rechtecke.



§10 Der Hauptsatz und seine Konsequenzen.

a. Integralfunktionen und der Hauptsatz. Der Hauptsatz ist das zentrale Resultat der Differential- und Integralrechnung. Er stellt eine überraschende Verbindung her zwischen zwei scheinbar völlig verschiedenen Fragestellungen und Konzepten. Auf der einen Seite die Differentialrechnung, die den Begriff der *Steigung* von Kurven und darauf aufbauend die Untersuchung von Funktionsverläufen zum Thema hat, und auf der anderen Seite die Integralrechnung, deren zentrales Thema der *Flächeninhalt* ist.

Einen ersten Hinweis auf diesen Zusammenhang entnimmt man den oben ermittelten Integrationsformeln. Um ihn deutlich machen zu können, betrachten wir das Integral bei fester unterer Grenze a als Funktion der oberen Grenze:

Definition: Ist f eine Funktion auf einem Intervall J , so definiert man für jede feste untere Grenze $a \in J$ die Integralfunktion I_a durch

$$\text{Integralfunktion: } I_a(x) = \int_a^x f$$

Wir setzen dabei voraus, daß dieses Integral existiert. Wie wir gesehen haben, ist dies jedenfalls dann erfüllt, wenn f stückweise monoton ist.

In Abschnitt b. haben wir für einige (wenige) Funktionen f jeweils die Integralfunktion $I_0(x) = \int_0^x f$ ermittelt. Wir stellen sie in folgender Tabelle zusammen:

$f(x)$	1	x	x^2	$x^{\frac{1}{2}}$
$I_0(x) = \int_0^x f$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

Bei dieser Zusammenstellung kann man erkennen, daß in der oberen Zeile jeweils die Ableitung des darunter stehenden Terms steht, daß also die Integralfunktion jeweils als Ableitung die Ausgangsfunktion hat. Dieser Zusammenhang ist kein Zufall, sondern gilt sehr allgemein! Er gilt für die sog. *stetigen* Funktionen, die wir hier im Grundkurs aus Zeitgründen aber nicht genauer studieren wollen. Es genügt uns, daß alle rationalen und allgemeiner alle differenzierbaren Funktionen diese Eigenschaft haben.

Hauptsatz: Es sei J ein Intervall (d. h. ein zusammenhängender Abschnitt) auf der Zahlengeraden und f eine Funktion, die im Intervall J lückenlos definiert ist. Wenn f stetig ist, insbesondere also wenn f differenzierbar ist, gilt das folgende:

Jede Integralfunktion I_a von f ist differenzierbar und hat als Ableitung gerade die Ausgangsfunktion f :

$$I_a \text{ Integralfunktion von } f \implies I'_a = f.$$

Die besondere Bedeutung dieses Hauptsatzes liegt darin, daß er eine Verbindung zwischen zwei zunächst sehr verschieden erscheinenden Konzepten der Analysis herstellt, nämlich zwischen dem aus der *Integralrechnung* erwachsenen Begriff der Integralfunktion und dem für die *Differentialrechnung* fundamentalen Ableitungsbegriff.

Der Hauptsatz verbindet die Integral- mit der Differentialrechnung.

b. Stammfunktionen und die Integralformel. Eine wichtige Konsequenz des Hauptsatzes ist die folgende, äußerst effektive Methode zur Berechnung von Integralen. Wir benötigen dazu folgende Definition:

Definition: Unter einer *Stammfunktion* einer Funktion f versteht man eine differenzierbare Funktion F , deren Ableitung f ist:

$$F \text{ ist Stammfunktion von } f \iff F' = f.$$

Mit dieser Definition kann man den Hauptsatz folgendermaßen formulieren:

Integralfunktionen von f sind Stammfunktionen von f .

Diese Tatsache nutzt man aus, um Integralfunktionen und damit Integralwerte zu ermitteln. Basis dafür ist die Tatsache, daß man in manchen Situationen *ohne* Kenntnis des Integrals Stammfunktionen ermitteln kann (siehe nachfolgenden Abschnitt d.).

Kennt man aber erste eine Stammfunktion, so kennt man alle: Ist nämlich F eine Stammfunktion von f , so sind natürlich auch alle Funktionen $F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$ eine Konstante) ebenfalls Stammfunktionen von f , denn die Ableitung einer Konstanten ist 0. Von dieser unmittelbar einsichtigen Tatsache gilt aber auch die folgende Umkehrung, die uns eine vollständige Übersicht über die Gesamtheit der Stammfunktionen zu einem festen f gibt.

Satz: Sind F_1 und F_2 zwei über einem Intervall J definierte Stammfunktionen derselben Funktion f , so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F_2(x) = F_1(x) + c \quad \text{für alle } x \in J.$$

Stammfunktionen unterscheiden sich über Intervallen nur um eine additive Konstante.

Begründung: Wir betrachten einmal die Differenzfunktion $F_2 - F_1$. Deren Ableitung ist überall 0, denn $(F_2 - F_1)' = F'_2 - F'_1 = f - f = 0$. Eine Funktion, die an *allen* Stellen die Ableitung 0 hat, muß über einem *Intervall* konstant sein: $F_2(x) - F_1(x) = c$.

Hieraus ergibt sich nun die für die Integralberechnung wichtige

Satz: (Integralformel) *Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes gilt für jede Stammfunktion F von f über J und beliebige $a, b \in J$:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Beweis: Nach dem Hauptsatz ist I_a eine Stammfunktion von f über dem Intervall J . Andererseits ist nach Voraussetzung F ebenfalls eine Stammfunktion von f über demselben Intervall J . Also existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ (die sog. *Integrationskonstante*) mit der Eigenschaft

$$I_a(x) = \int_a^x f = F(x) + c \quad \text{für alle } x \in J. \quad (*)$$

Es gilt nun nur noch die Integrationskonstante c zu bestimmen. Dazu beachten wir, daß bei Integralfunktionen immer *einen* Wert kennen, es gilt nämlich:

$$I_a(a) = \int_a^a f = 0.$$

Indem wir (*) für $x = a$ auswerten, erhalten wir

$$0 = F(a) + c, \quad \text{also } c = -F(a),$$

und damit lautet (*) schließlich:

$$\int_a^x f = F(x) - F(a) \quad \text{für alle } x \in J.$$

Indem man $x = b$ setzt, erhält man die behauptete Integralformel.

In den Übungen haben wir eine Vielzahl von Beispielen für die Effektivität dieser Integralformel kennengelernt. Bei der Anwendung der Integralformel muß man zunächst eine Stammfunktion F für den Integranden f finden und diese dann an den Integrationsgrenzen auswerten. Dabei haben wir die folgende Schreibweise verwendet:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

c. Integrationsregeln. Die Berechnung von Integralen auf diesem Wege steht und fällt mit der Kenntnis oder Ermittlung von Stammfunktionen zu gegebenen Funktionen. Da es sich dabei um eine Umkehrung des Ableitungsprozesses handelt, kann man aus Ableitungsregeln immer auch Regeln zur Ermittlung von Stammfunktionen gewinnen. Erste Beispiele gibt der folgende

Satz: a) (*Stammfunktionen für Potenzfunktionen*) Für $n \in \mathbb{R}$, $n \neq -1$ gilt:

$$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \text{ ist ein Stammfunktionsterm für } f(x) = x^n.$$

b) (*Summenregel*) Sind F bzw. G Stammfunktionen für f bzw. g , so ist $F \pm G$ eine Stammfunktion für $f \pm g$.

c) (*Faktorregel*) Ist F eine Stammfunktion von f und $c \in \mathbb{R}$ konstant, so ist cF eine Stammfunktion für cf .

d) (*Lineare Substitution*) Ist F eine Stammfunktion von f und $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, so ist $\frac{1}{m}F(mx+n)$ ein Stammfunktionsterm für $f(mx+n)$.

Man *beweist* alle diese Behauptungen, indem man die vorgebliche Stammfunktion ableitet und feststellt, daß sich die gewünschte Funktion ergibt. Generell ist der *Nachweis*, daß eine *vorgegebene* Funktion tatsächlich Stammfunktion ist, einfach durch Ableiten zu führen. Viel schwieriger ist es jedoch, eine Stammfunktion zu *ermitteln*. Aufgrund der drei Regeln a)–c) ist dies für *ganzzonale* Funktionen immer möglich, und die Stammfunktionen sind ebenfalls wieder ganzzonal.

Bei rationalen Funktionen stößt man jedoch bereits auf erhebliche Probleme. Obwohl die Ableitung rationaler Funktionen wieder rationale Funktionen sind, gilt für Stammfunktionen ein entsprechendes Resultat nicht. Ein wichtiges Beispiel dafür ist die bereits bei der obigen Potenzregel a) ausgelassene Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Sie besitzt zwar eine Stammfunktion, da nach dem Hauptsatz jede Integralfunktion eine Stammfunktion ist, aber diese ist keine rationale Funktion.

Die obigen Regeln für Stammfunktionen liefern unmittelbar Integrationsregeln, so ergibt sich etwa aus der Summen- und Faktorregel:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b cf(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Wir begründen die Formel für die Summe. (Führen Sie die Argumentation für die Differenz- und Faktorregel zur Übung selbst durch.) Sind F bzw. G Stammfunktionen von f bzw. g , so ist nach der Summenregel für Stammfunktionen $F + G$ eine Stammfunktion von $f + g$. Aus der Integralformel ergibt sich daher die Behauptung:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= [F(x) + G(x)]_a^b = (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

§11 Flächen zwischen Graphen, Rotationsvolumina, Bogenlängen

a. Flächen zwischen Graph und x -Achse. Ausgangspunkt der Integraldefinition war das Problem der Flächenberechnung. Bereits in §8 d. haben wir den entscheidenden Zusammenhang zwischen Fläche und Integral formuliert. Wir wollen ihn hier ausweiten zu einer systematischen Methode, die es erlaubt, die Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen zu ermitteln. Ausgangspunkt ist unsere geometrische Beschreibung des Integrals aus §1 d.:

$$\int_a^b f = \begin{cases} +A & \text{falls } f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a, b], \\ -A & \text{falls } f(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in [a, b]. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnete A die Fläche zwischen der x -Achse und dem Graphen von f in den Grenzen von a bis b . Da Flächeninhalte nie negativ sind, bedeutet die obige Beziehung, daß in beiden Fällen der Flächeninhalt A der Betrag des Integrals ist:

Für Funktionen, die über einem Intervall $[a, b]$ ihr Vorzeichen nicht ändern, ist der Flächeninhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse in den Grenzen von a bis b gleich dem Betrag des Integrals:

$$f \text{ ohne Vorzeichenwechsel über } [a, b] \implies A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Wechselt dagegen f im Intervall $[a, b]$ sein Vorzeichen, so muß man zur Berechnung der Fläche A das Intervall $[a, b]$ in einzelne Abschnitte unterteilen, in denen f das Vorzeichen nicht ändert, und darauf dann die obige Formel anwenden.

Um dies zu erreichen, bestimmt man für f im Intervall $[a, b]$ sämtliche Nullstellen mit Vorzeichenwechsel. In den Abschnitten zwischen diesen Nullstellen behält dann f sein Vorzeichen bei. Berechnet man also für jeden dieser Teilabschnitte das Integral und addiert die Beträge auf, so erhält man den gesuchten Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x -Achse in den gegebenen Grenzen.

Um die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x -Achse in gegebenen Grenzen a, b zu bestimmen, muß man also:

1. Die Nullstellen von f mit VZW im Innern von $[a, b]$ ermitteln.

2. Von Nullstelle zu Nullstelle bzw. Rand integrieren.
3. Die Beträge der ermittelten Integrale addieren.

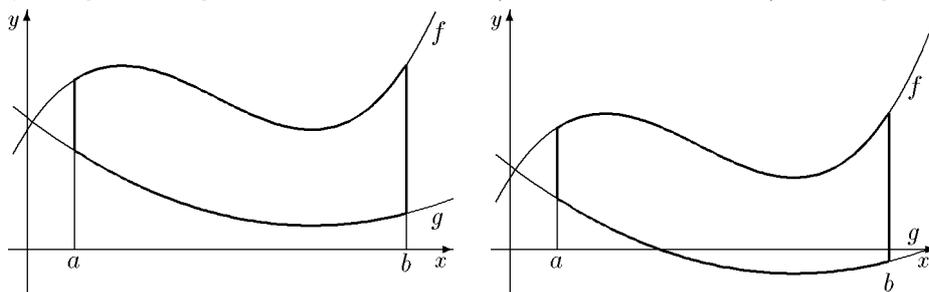
b. Flächen zwischen zwei Graphen. Wir wollen nun zeigen, daß dieses Resultat es auch ermöglicht, Flächen zwischen zwei Graphen zu ermitteln. Es gilt nämlich:

Satz: Die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen f, g in den Grenzen von a bis b genauso groß wie die Fläche zwischen dem Graphen der Differenzfunktion $f - g$ und der x -Achse in denselben Grenzen.

Zur Begründung unterteilen wir das Intervall zunächst in Teilintervalle, in denen $f - g$ sein Vorzeichen nicht wechselt. In jedem dieser Abschnitte verläuft eine der Funktionen ständig oberhalb der anderen (siehe die nachfolgenden Skizzen). Dann gilt:

$$A = \int_a^b (f - g) \quad \text{falls } f(x) \geq g(x) \text{ über } [a, b].$$

Beweis: Wenn f und g keine negativen Werte annehmen (wie in der linken Skizze), ist die gesuchte Fläche



A gerade die Differenz der Flächen unter den beiden Graphen, also gleich der Differenz $A = \int_a^b f - \int_a^b g$ zweier Integrale. Nun ergibt sich aus den Regeln für Integrale (S. 39), daß die Differenz zweier Integrale gleich dem Integral der Differenzfunktion ist: $A = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g)$. Da $f - g$ keine negativen Werte hat, ist das letztgenannte Integral gerade der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f - g$ und der x -Achse in denselben Grenzen.

Wenn nun f oder g im Bereich $[a, b]$ Vorzeichenwechsel haben (siehe die vorangehende rechte Skizze), so argumentiert man etwa folgendermaßen: Man verschiebt *beide* Funktionsgraphen so weit nach oben, daß im betrachteten Bereich beide Funktionen oberhalb der x -Achse verlaufen. *Bei einer solchen Verschiebung ändern sich weder die eingeschlossene Fläche noch die Differenzfunktion $f - g$, also auch nicht deren Integral.* Also kann man stets die im linken Bild skizzierte Situation erreichen, in der wir die obige Formel bewiesen hatten.

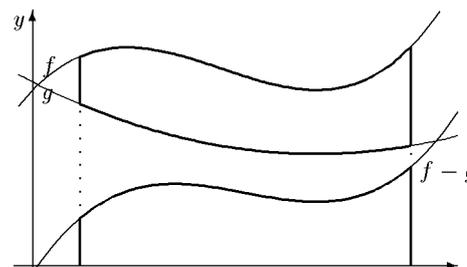
Die soeben hergeleitete Formel bedeutet, daß die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g denselben Flächeninhalt hat wie die Fläche zwischen dem Graphen der Differenzfunktion $h = f - g$ und der x -Achse ist (bei unveränderten Grenzen). Dieser Sachverhalt ist in der nebenstehenden Skizze verdeutlicht. Beachten Sie, daß als Folge der Integralrechnung hier zwei Flächenstücke als *gleich groß* erkannt werden, obwohl sie *unterschiedliche Gestalt* haben, d. h. *nicht deckungsgleich* sind.

Es kommt also beim Flächeninhalt zwischen zwei Graphen überhaupt nicht auf die beiden Einzelfunktionen an, sondern lediglich auf ihre Differenzfunktion $h = f - g$. Für diese berechnet man den Flächeninhalt wie unter a. beschrieben, wobei lediglich die dort auftretende Funktion f durch die Differenzfunktion $h = f - g$ zu ersetzen ist:

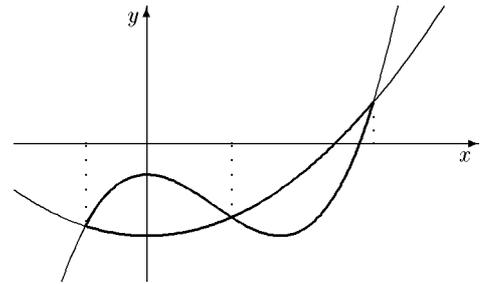
Um die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen f, g in vorgegebenen Grenzen a, b zu bestimmen, muß man also:

1. Die Differenzfunktion $h = f - g$ bilden.
2. Für h (!) die Nullstellen mit VZW im Bereich $[a, b]$ ermitteln.
3. Die Funktion h von Nullstelle zu Nullstelle bzw. Rand integrieren.
4. Die Beträge der ermittelten Integrale addieren.

Hierbei ist es auch unerheblich, welche Differenz ($f - g$ oder $g - f$) man bildet. Dabei ändert sich nur das Vorzeichen, und da man schließlich die Beträge bilden muß, ergibt sich auf beiden Wegen derselbe Flächeninhalt (wie es ja auch sein muß). Man muß also nicht zuvor in einer Kurvendiskussion oder mit ähnlichen Überlegungen klären, welche Funktion in welchem Bereich größere Werte als die andere hat.



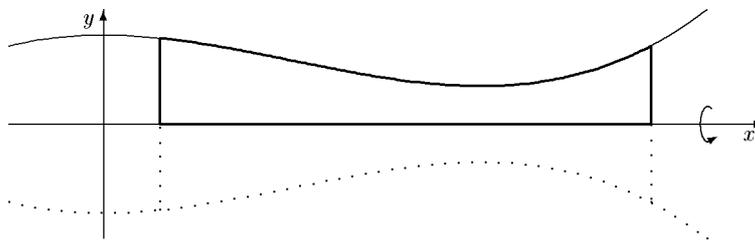
c. Eingeschlossene Flächenstücke. Schließlich wollen wir noch den Inhalt von Flächen berechnen, die von zwei Graphen eingeschlossen werden. Darunter versteht man den Bereich, der *rundum* von den Graphen begrenzt wird, also den Bereich zwischen den beiden Graphen vom ersten bis zum letzten Schnittpunkt.



Um die von zwei Funktionsgraphen eingeschlossene Fläche zu bestimmen, muß man also:

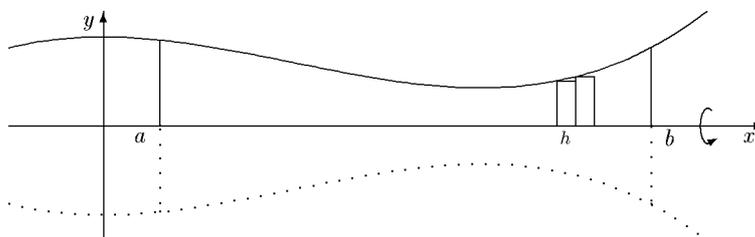
1. Die Differenzfunktion $h = f - g$ bilden.
2. Für h sämtliche Nullstellen ermitteln.
3. Die Funktion h von Nullstelle zu Nullstelle integrieren.
4. Die Beträge der ermittelten Integrale addieren.

d. Rotationsvolumina. Nicht nur Flächen, sondern auch Volumina kann man durch Integrale berechnen. Wir wollen hier sog. *Rotationskörper* betrachten. Sie entstehen durch *Rotation* eines Flächenstücks (etwa wie das dick umrandete in folgender Skizze) *um die x-Achse*. Wir wollen das Volumen des sich ergebenden Rotationskörpers bestimmen, wenn die Randkurve der Fläche als zusammen-



hängender Graph einer Funktion f gegeben ist.

Um dieses Volumen zu bestimmen, schöpft man den Rotationskörper durch die Rotationskörper zu Untersummen aus. Deren Volumen ist berechenbar, denn es setzt sich aus lauter 'Scheiben' zusammen, deren Höhe gerade die Breite h der Intervalle ist und deren Radius der kleinste Funktionswert in dem Streifen ist. Als Volumen einer solchen Scheibe erhält man (unter Verwendung der Flächenformel



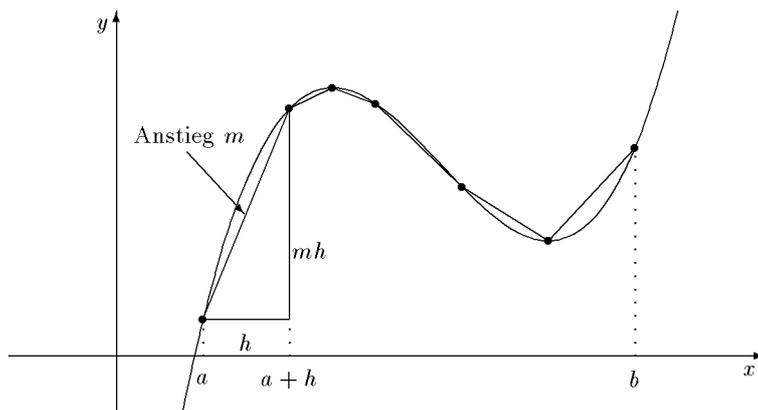
für Kreise)

$$h \cdot \pi \cdot (\text{kleinster Funktionswert})^2.$$

Summiert man nun diese Volumina für sämtliche Streifen der Unterteilung auf, so erhält man gerade eine Untersumme für das Integral $\int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx$. Für $n \rightarrow \infty$ bzw. $h \rightarrow 0$ konvergieren die Untersummen dann gegen dieses Integral, das damit das gesuchte Volumen darstellt:

Rotationsvolumen: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$

e. Die Bogenlänge. Aber auch zur Berechnung der Länge von Kurvenstücken kann man das Integral verwenden. Das Kurvenstück sei als Graph einer Funktion f in den Grenzen von a bis b gegeben. Zur Berechnung unterteilen wir es durch Zwischenpunkte und verbinden diese durch Geradenstücke (*Sehnen*), wie in der Skizze angegeben.



Die Länge einer einzelnen Sehne berechnen wir mit Hilfe des Satzes von Pythagoras wie folgt: Hat die waagerechte Kathete die Länge h , so hat die senkrechte die Länge $m \cdot h$ hat, wenn m der *Anstieg der Sehne* ist. Also ist die Länge der Sehne

$$l_{\text{Sehne}} = \sqrt{h^2 + (mh)^2} = h \cdot \sqrt{1 + m^2}, \quad m \text{ der Sehnenanstieg.}$$

Nun ist der Sehnenanstieg m der *durchschnittliche* Anstieg von f in dem Streifen, also liegt m zwischen dem kleinsten und dem größten Anstieg von f , d. h. zwischen dem kleinsten und größten Wert von f' in diesem Streifen (vorausgesetzt f ist differenzierbar). Also:

$$(\text{kleinster Wert von } f'(x)) \leq m \leq (\text{größter Wert von } f'(x))$$

Entsprechend sind dann die Sehnenlängen eingeschachtelt

$$h \cdot (\text{kleinster Wert von } \sqrt{1 + f'(x)^2}) \leq l_{\text{Sehne}} \leq h \cdot (\text{größter Wert von } \sqrt{1 + f'(x)^2})$$

Summiert man nun alle diese Längen auf, so erhält man eine Summe, *die zwischen Ober- und Untersumme der Funktion $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ für diese Unterteilung des Intervalls liegt*. Die Bogenlänge stimmt daher mit dem gemeinsamen Grenzwert von Ober- und Untersumme überein, d. h. mit dem Integral der Funktion $\sqrt{1 + f'(x)^2}$:

Bogenlänge: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$