Grundkurs Mathematik

Übungen 3. Semester

Dr. Norbert Klingen

25. März 2003

Inhaltsverzeichnis

3G4/5 Mathematik (Kg) **2. Februar 1998**

Übungen (1)

1) a) Definieren Sie den Begriff 'ganz-rationale Funktion'.
   b) Was versteht man unter dem Grad einer ganz-rationalen Funktion?
   c) Welche ganzrationalen Funktionen haben den Grad 0?
2) Führen Sie für die folgenden Polynomterme Polynomdivision durch und bestimmen Sie damit zu den gegebenen Polynomtermen $f(x)$ und $g(x)$ Polynomterme $q(x)$ und $r(x)$ mit $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ und Grad von $r(x) <$ Grad von $g(x)$:
   a) $f(x) = x^6 - 1$, $g(x) = x^2 + 1$,
   b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$, $g(x) = x^2 + x + 1$,
   c) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1$, $g(x) = 2x^2 + 1$.
   Probe: Überprüfen Sie die gefundene Beziehung $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, indem Sie die rechte Seite ausmultiplizieren.
3) Entscheiden Sie — mit möglichst wenig Rechenaufwand —, welche der Zahlen $-2, 2, 7, 10$ Nullstellen der folgenden ganzrationalen Funktionen f sind:
   a) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1505$,
   b) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 3x - 78$,
   c) $f(x) = \dfrac{x^4}{10} + \dfrac{x^3}{5} + x - 315,7$,
   d) $f(x) = \dfrac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x - 12$.
   Wenn Nullstellen vorliegen, so spalten Sie bitte die entsprechenden Linearfaktoren ab. [Überlegen Sie sich, wie Sie bei mehreren Nullstellen den Rechenaufwand möglichst gering halten können.]
4) Bestimmen Sie *alle* Nullstellen der Funktionen f mit den folgenden Funktionstermen:
   a) $f(x) = x^3 - 2,5x^2 - x + 2,5$,
   b) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{3} + x - 1$,
   c) $f(x) = 0,2x^3 - 0,3x^2 - 1,2x - 0,7$.
5) Bestimmen Sie die Lösungsmengen $\mathbb{L}$ der folgenden Gleichungen:
   a) $x^3 + x = 7x^2 + 7$,
   b) $x^5 + 1 = x^4 + x$.

Übungen (1) — Lösungen

1) a) Eine ganz-rationale Funktion ist eine Funktion f, die durch einen Funktionsterm der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

beschrieben werden kann mit einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ und beliebigen reellen Zahlen $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$.
b) Ist im Funktionsterm $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ von f der Koeffizient $a_n \neq 0$, so ist n der Grad von f. [Der Grad von f ist also der höchste in obigem Funktionsterm 'tatsächlich' (d. h. mit einem Koeffizienten $\neq 0$) auftretende Exponent von x.]
c) Die ganz-rationalen Funktionen vom Grade 0 sind die konstanten Funktionen mit Ausnahme der Nullfunktion.

2) a) $q(x) = x^4 - x^2 + 1$, $r(x) = -2$, also $x^6 - 1 = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1) - 2$.
b) $x^4 - 3x^3 + 2x = (x^2 - 4x + 3)(x^2 + x + 1) + 3x - 3$.
c) $2x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x + 1)(2x^2 + 1)$; indsbesondere also $r(x) = 0$.

3) Um den Rechenaufwand zu verringern, berücksichtigen wir Satz (1.7): Eine ganze Zahl a (hier ± 2, 7 oder 10) kann nur dann Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen (!) Koeffizienten sein, wenn sie das sog. absolute Glied a_0 des Polynoms teilt.
a) f hat ganzzahlige Koeffizienten! ± 2 und 10 sind offensichtlich keine Teiler von 1505, also auch keine Nullstellen von f. 7 ist Teiler von 1505 ($= 215 \cdot 7$), kommt also als Nullstelle in Frage. Einsetzen und Ausrechnen ergibt tatsächlich $f(7) = 0$.
Der entsprechende Linearfaktor ist $x - 7$. Mittels Polynomdivision folgt $4x^3 + 2x^2 + 5x - 1505 = (x-7) \cdot (4x^2 + 30x + 215)$. [Da 7 eine Nullstelle von f war, mußte bei der Polynomdivision durch $x - 7$ der Rest 0 (!) bleiben. Ist dies einmal nicht der Fall, so liegt in der Polynomdivision ein Rechenfehler vor!]
b) Auch dieser Polynomterm $f(x)$ hat ganzzahlige Koeffizienten. 7 und 10 sind keine Teiler von 78, also auch keine Nullstellen von f. Wir müssen ± 2 einsetzen und erhalten $f(2) = 16 - 6\cdot 8 + 2\cdot 4 - 3\cdot 2 - 78 = -46 \neq 0$, aber $f(-2) = 16 + 48 + 8 + 6 - 78 = 0$.
Der zur Nullstelle -2 gehörige Linearfaktor ist $x+2$. Polynomdivision ergibt $x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 3x - 78 = (x + 2)(x^3 - 8x^2 + 18x - 39)$.
c) Dieser Polynomterm hat keine ganzzahligen Koeffizienten, aber rationale. Daher muß man zunächst die Nenner 'beseitigen', indem man mit dem Hauptnenner 10 multipliziert: Man betrachtet statt des Polynoms $f(x)$ den Polynomterm

$$g(x) = 10 \cdot f(x) = 10 \cdot \Big(\frac{x^4}{10} + \frac{x^3}{5} + x - 315{,}7\Big) = x^4 + 2x^3 + 10x - 3157\,.$$

mit ganzzahligen (!) Koeffizienten. Dieser hat natürlich dieselben Nullstellen wie f. Sein absolutes Glied 3157 ist weder durch ± 2 noch durch 10 teilbar, wohl aber durch 7. Damit kommt lediglich 7 als Nullstelle in Frage, und in der Tat ist $g(7) = 0$, also auch $f(7) = \frac{1}{10} \cdot g(7) = 0$.
Der entsprechende Linearfaktor ist $x - 7$ und man erhält durch Polynomdivision $g(x) = x^4 + 2x^3 + 10x - 3157 = (x - 7)(x^3 + 9x^2 + 63x + 451)$. Für das gegebene $f(x)$ bedeutet dies also (den Faktor 1/10 nicht vergessen!)

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot g(x) = \frac{1}{10} \cdot (x - 7) \cdot (x^3 + 9x^2 + 63x + 451)\,.$$

d) Hier muß man ebenfalls zuerst mit 2 multiplizieren und dann den Term $g(x) = 2f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x - 24$ untersuchen. 7 und 10 sind keine Teiler von 24 und scheiden daher sofort als Nullstellen aus. $+2$ und -2 hingegen sind tatsächlich Nullstellen:

$$g(\pm 2) = \pm 8 + 24 \mp 8 - 24 = \pm 8 \mp 8 = 0\,.$$

Die entsprechenden Linearfaktoren sind $x - 2$ und $x + 2$. [Durch zweimalige Polynomdivision könnte man diese abspalten: $g(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 8x + 12)$ und $x^2 + 8x + 12 = (x + 2) \cdot (x + 6)$. Dies ergibt insgesamt $g(x) = (x-2)(x+2) \cdot (x+6)$.] Günstiger ist es hingegen, direkt die Polynomdivision durch $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$ durchzuführen: Dies ergibt mit viel geringerem Rechenaufwand natürlich

dasselbe Ergebnis $g(x) = x^3 + 6x^2 - 4x - 24 = (x^2 - 4) \cdot (x + 6) = (x - 2)(x + 2)(x + 6)$.
Damit hat man schließlich eine vollständige Zerlegung des Polynoms $f(x)$ in Linearfaktoren erreicht:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot g(x) = \frac{1}{2}(x + 2)(x - 2)(x + 6)\,,$$

aus der man *alle* Nullstellen von f ablesen kann: -2, $+2$ und -6.

4) Durch Einsetzen von ± 1 in die gegebenen Funktionen stellt man unmittelbar fest:
a) $+1$ und -1 sind Nullstellen,
b) $+1$ ist Nullstelle,
c) -1 ist Nullstelle.
Man spaltet nun die jeweiligen Linearfaktoren ab:
Im Falle a) spaltet man (mittels Polynomdivision durch $x^2 - 1$) beide Faktoren in einem Schritt ab und erhält

$$f(x) = x^3 - 2,5x - x + 2,5 = (x^2 - 1)(x - 2,5) = (x - 1)(x + 1)(x - 2,5).$$

Man liest nun alle Nullstellen von f ab: $+1$, -1 und $2,5$.
b) Hier ergibt die Polynomdivision

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x^2 + 3x - 3) = \frac{1}{3}(x - 1)(x^2 + 3).$$

Da $x^2 + 3$ keine Nullstelle hat, ist $+1$ die einzige Nullstelle von f.
c) Hier erhält man bei Polynomdivision durch $x + 1$

$$f(x) = 0,1 \cdot (2x^3 - 3x^2 - 12x - 7) = 0,1 \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 - 5x - 7)$$

Die Nullstellen des quadratischen Faktors $2x^2 - 5x - 7$ kann man nun mit der p, q-Formel berechnen. Ergebnis: -1 und $7/2$.
[Man sieht aber auch unmittelbar, daß -1 Nullstelle auch dieses quadratischen Terms $2x^2 - 5x - 7$ ist, und daher nochmals $x + 1$ abgespalten werden kann: $2x^2 - 5x - 7 = (x + 1)(2x - 7)$. Dies ergibt insgesamt $f(x) = 0,1 \cdot (x + 1) \cdot (x + 1)(2x - 7) = 0,1 \cdot (x + 1)^2(2x - 7)$, woraus man wiederum die Nullstellen von f abliest: -1, und $7/2$ als Nullstelle von $2x - 7$.]

5) a) Die gestellte Gleichung ist natürlich äquivalent zu $x^3 + x - (7x^2 + 7) = 0$ bzw. $f(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7 = 0$. Man muß also die Nullstellen einer ganz-rationalen Funktion f bestimmen.
Als ganzzahlige Nullstellen kommen nur Teiler von 7 in Frage. ± 1 sind offenbar keine Nullstellen, wohl aber die 7. (Man erkennt unmittelbar, daß 7 die ursprünglich gestellte Gleichung löst.) Man spaltet (durch Polynomdivision) den Linearfaktor $x - 7$ ab und erhält $f(x) = (x - 7)(x^2 + 1)$. Nun hat $x^2 + 1$ keine Nullstelle, (da $x^2 + 1$ nur Werte ≥ 1 annimmt,) so daß 7 die einzige (reelle) Nullstelle von f ist. Die Ausgangsgleichung $x^3 + x = 7x^2 + 7$ hat also 7 als einzige Lösung: Die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{R}$ ist daher $\mathbb{L} = \{7\}$.
b) Offenbar sind ± 1 Lösungen der gestellten Gleichung und damit Nullstellen von $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$. Wir dividieren daher $f(x)$ durch $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ und erhalten:
$f(x) = (x^2 - 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$. Der Faktor $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ hat wiederum 1 als Nullstelle. Erneutes Abspalten ergibt $g(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$ und damit insgesamt:

$$\begin{aligned} f(x) = x^5 - x^4 - x + 1 &= (x^2 - 1) \cdot (x - 1)(x^2 + 1) \\ &= (x + 1)(x - 1) \cdot (x - 1)(x^2 + 1) \\ &= (x + 1)(x - 1)^2(x^2 + 1)\,. \end{aligned}$$

Da $x^2 + 1$ keine (reelle) Nullstelle besitzt, sind $+1$ und -1 die einzigen Nullstellen von f, und damit auch die einzigen Lösungen der gestellten Gleichung. Die Lösungsmenge ist daher $\mathbb{L} = \{-1, +1\}$.

Übungen (2)

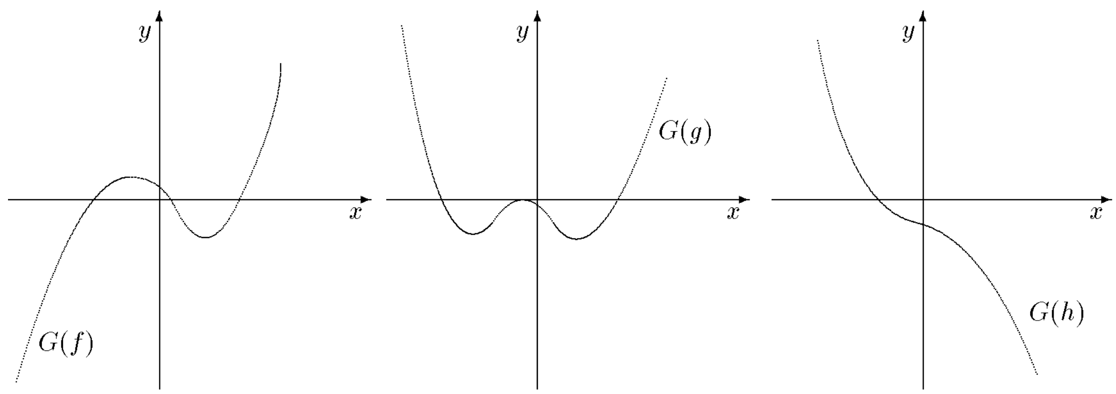
1) Gegeben sei die ganz-rationale Funktion f mit dem Funktionsterm

$$f(x) = x^5 - 7x^4 - 8x^3 + 56x^2 + 7x - 49\,.$$

a) Zerlegen Sie $f(x)$ in Linearfaktoren.
b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f sowie ihre Vielfachheiten.
c) Skizzieren Sie den aufgrund der zuvor gefundenen Resultate möglichen Verlauf des Graphen von f. Schraffieren Sie möglichst große Bereiche der x, y-Koordinatenebene, in denen der Graph von f *nicht* verlaufen kann.

2) Bestimmen Sie Nullstellen, Nullstellenordnungen und die Vorzeichenverteilung der folgenden Funktionen:
a) $f(x) = (x+2)^2(x^2+2)(x^2-2)$, b) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3$.

3) Die nachfolgenden Skizzen zeigen Graphen ganz-rationaler Funktionen. Bestimmen Sie jeweils,
1) wie groß der Grad mindestens sein muß,
2) ob der Grad gerade oder ungerade ist,
3) und welches Vorzeichen der führende Koeffizient haben muß.
Begründen Sie ihre Antworten.



Übungen (2) — Lösungen

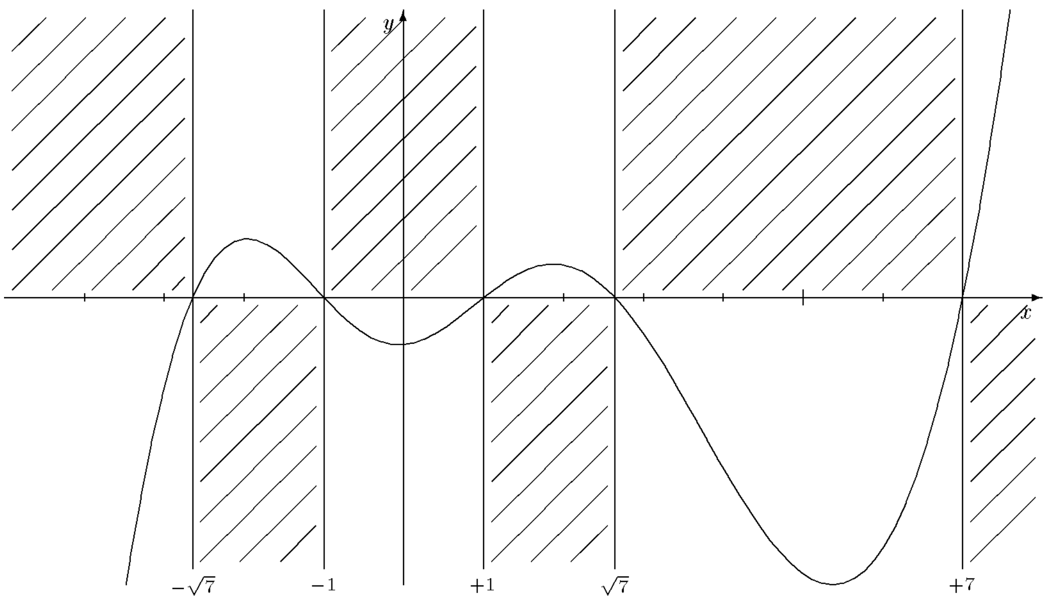
1) a) Als ganzzahlige Nullstellen kommen nur Teiler von 49 in Frage. ± 1 sind Nullstellen von f, denn: $f(\pm 1) = \pm 1 - 7 \mp 8 + 56 \pm 7 - 49 = \pm 1 \mp 8 \pm 7 = 0$. Man dividiert daher $f(x)$ durch die zu den Nullstellen ± 1 gehörigen Linearfaktoren $(x+1)$ und $(x-1)$ bzw. unmittelbar durch deren Produkt $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$. Durch Polynomdivision erhält man: $f(x) = (x^2-1)(x^3 - 7x^2 - 7x + 49)$.
Das nun zu untersuchende Polynom $g(x) = x^3 - 7x^2 - 7x + 49$ hat die Nullstelle 7, denn $g(7) = 7^3 - 7 \cdot 7^2 - 7 \cdot 7 + 49 = 0$. Division durch $(x-7)$ ergibt: $g(x) = (x-7)(x^2-7)$. Zusammengefaßt erhält man die folgende Zerlegung von $f(x)$ in Linearfaktoren:

$$f(x) = (x^2-1)(x-7)(x^2-7) = (x-1)(x+1) \cdot (x-7) \cdot (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})\,.$$

b) f hat die 5 Nullstellen $-\sqrt{7}$, -1, $+1$, $+\sqrt{7}$ und $+7$. Alle Nullstellen haben die Vielfachheit 1, da die entsprechenden Linearfaktoren jeweils nur einmal in der obigen multiplikativen Zerlegung von $f(x)$ auftreten.
c) Da alle Nullstellen von f einfach sind, liegt jeweils ein Vorzeichenwechsel vor. Außerdem ist der führende Koeffizient von f positiv, so daß für x größer als alle auftretenden Nullstellen $f(x)$ positiv ist. Damit ergibt sich die folgende Vorzeichenverteilung für $f(x)$:

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > 7, \\ < 0 & \text{für } \sqrt{7} < x < 7, \\ > 0 & \text{für } 1 < x < \sqrt{7}, \\ < 0 & \text{für } -1 < x < 1, \\ > 0 & \text{für } -\sqrt{7} < x < -1, \\ < 0 & \text{für } x < -\sqrt{7}. \end{cases}$$

Die folgende Skizze gibt einen möglichen Verlauf des Graphen $G(f)$. In den schraffierten Bereichen kann kein Punkt des Graphen von f liegen.



2) Im ersten Schritt bestimmen wir alle Nullstellen und die zugehörige Zerlegung von $f(x)$ in Faktoren:
a) In diesem Falle ist dies einfach, da der Funktionsterm $f(x)$ schon in einfache Faktoren zerlegt ist. Indem man noch $x^2 - 2$ nach der dritten binomischen Formel zerlegt, erhält man

$$f(x) = (x+2)^2(x^2+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = (x+2)^2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \cdot (x^2+2)\,.$$

Da $x^2 + 2$ keine Nullstellen besitzt ($x^2 + 2 \geq 2$ für alle x), kann man aus dieser Zerlegung sämtliche Nullstellen von f ablesen:
Die Funktion f hat die Nullstellen -2 (mit der Ordnung 2, also ohne Vorzeichenwechsel), $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ (jeweils mit der Ordnung 1, also mit Vorzeichenwechsel), und sonst keine.
Da der führende Koeffizient von $f(x)$ gerade 1, also insbesondere positiv ist, gilt $f(x) > 0$ für x größer als alle Nullstellen, also für $x > \sqrt{2}$. Da nur bei $\pm\sqrt{2}$ Vorzeichenwechsel stattfinden, erhalten wir die folgende Vorzeichenverteilung von f:

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > \sqrt{2}, \\ < 0 & \text{für } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ > 0 & \text{für } -2 < x < -\sqrt{2}, \\ > 0 & \text{für } x < -2. \end{cases}$$

Im Falle b) muß man zunächst alle Nullstellen bestimmen. Als *ganzzahlige* Nullstellen kommen nur die Teiler von 3 in Frage (± 1, ± 3). Man findet (durch Ausprobieren), daß $+1$ eine Nullstelle ist. Mittels Polynomdivision erhält man

$$(x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3) : (x-1) = x^3 - x^2 - 3x + 3.$$

Der gefundene Teiler hat $+1$ erneut als Nullstelle. Erneutes Abspalten des Linearfaktors $x - 1$ ergibt

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3 = (x-1)(x^3 - x^2 - 3x + 3) = (x-1)(x-1)(x^2-3)$$

und damit schließlich

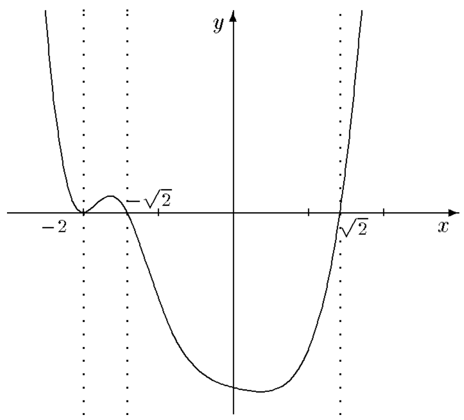
$$f(x) = (x+\sqrt{3})(x-1)^2(x-\sqrt{3})\,,$$

woraus man die Nullstellen von f und ihre Ordnungen abliest:
Die Nullstellen von f sind $-\sqrt{3}$ und $+\sqrt{3}$ (jeweils mit der Ordnung 1, also mit Vorzeichenwechsel) und $+1$ (mit der Ordnung 2, also ohne Vorzeichenwechsel).
Wegen $f(x) > 0$ für $x > \sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ ist die größte Nullstelle und der führende Koeffizient von $f(x)$ ist 1, also positiv.) erhält man die Vorzeichenverteilung für f:

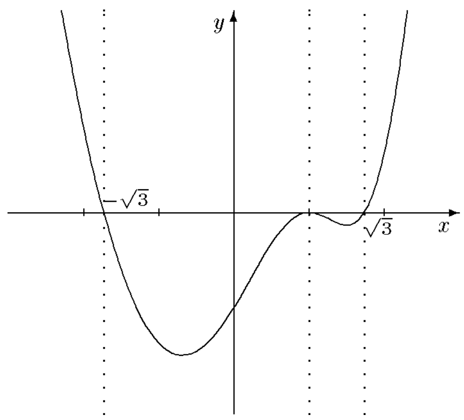
$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > \sqrt{3}, \\ < 0 & \text{für } 1 < x < \sqrt{3}, \\ < 0 & \text{für } -\sqrt{3} < x < 1, \\ > 0 & \text{für } x < -\sqrt{3}. \end{cases}$$

In den folgenden Skizzen sind Graphen eingezeichnet, die diese Vorzeichenverteilung haben. *Dies sind nicht die genauen Graphen der Funktionen; sie verdeutlichen* *lediglich die Vorzeichenverteilung. Daher ist auch auf der y-Achse keine Einheit angegeben.* Schraffieren Sie selbst die Bereiche, in denen der Graph auf keinen Fall verlaufen kann.

a)



b)



3) $G(f)$: Der Graph von f schneidet die x-Achse 3-mal, d. h. f hat mindestens 3 Nullstellen, also auch mindestens den Grad 3. Da für x größer als alle Nullstellen $f(x) > 0$ ist, muß der führende Koeffizient positiv sein. Da für sehr kleine x $f(x)$ ein anderes Vorzeichen hat als für sehr große x, muß der Grad von f ungerade sein.

$G(g)$: Offensichtlich hat g 3 Nullstellen, von denen aber eine mindestens die Vielfachheit 2 hat, da kein Vorzeichenwechsel stattfindet. Damit hat g mindestens den Grad $1 + 2 + 1 = 4$. Das Vorzeichen des führenden Koeffizienten von g ist positiv (wegen $g(x) > 0$ bei großem x). Der Grad von g muß gerade sein, da $g(x)$ für sehr kleine und sehr große x dasselbe Vorzeichen hat.

$G(h)$: h hat nur eine Nullstelle, der Grad ist also mindestens 1. Da der Graph aber keine Gerade ist, muß der Grad mindestens 2 sein. Nun muß aber der Grad ungerade sein ($h(x)$ hat für sehr kleine x ein anderes Vorzeichen als für sehr große x), so daß er mindestens 3 ist. Schließlich muß der führende Koeffizient negativ sein, da $h(x)$ für x größer als alle Nullstellen negativ ist.

Unter Verwendung der Überlegungen aus E) kann man aber auch so argumentieren: Man kann eine Gerade finden, die den Graphen von h in drei Punkten schneidet, also muß h mindestens den Grad 3 haben.

Übungen (3)

1) Definieren Sie den Begriff 'rationale Funktion'. Wo liegen die Lücken einer rationalen Funktion? Was versteht man unter einem Pol, was unter einer hebbaren Lücke einer rationalen Funktion?
2) Bestimmen Sie für die folgenden rationalen Funktionen alle Lücken und entscheiden Sie jeweils, ob ein Pol oder eine hebbare Lücke vorliegt:
   a) $f_1(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4x+4}$ b) $f_2(x) = \dfrac{x^3-x^2+6x}{x^2-4}$
   c) $f_3(x) = \dfrac{x+2}{x^2+x-2}$ d) $f_4(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
3) Bestimmen Sie für die 4 Funktionen der vorangehenden Aufgabe alle Stellen, an denen die Funktionswerte das Vorzeichen wechseln. Schraffieren Sie möglichst große Bereiche, in denen der Graph *nicht* verlaufen kann.
4) Untersuchen Sie, ob die 4 Funktionen aus Aufgabe 2) Asymptoten besitzen, und zeichnen Sie diese gegebenenfalls. Skizzieren Sie nun – unter Beachtung aller bislang vorliegenden Resultate – einen möglichen Verlauf der Graphen von f_2 und f_4.

Weitere Aufgaben: Lehrbuch, S. 47, Nr. 7 und S. 48, Nr. 3,5,6.

Übungen (3) — Lösungen

1) Eine rationale Funktion ist ein Quotient zweier ganzrationaler Funktionen, wobei der Nenner nicht die Nullfunktion ist.
Definitionslücken einer rationalen Funktion sind genau die Nullstellen des Nennerpolynoms.
Unter einem Pol einer rationalen Funktion versteht man eine Lücke, in deren Nähe die Werte der rationalen Funktion betraglich beliebig groß werden.
Eine hebbare Lücke einer rationalen Funktion f ist eine Lücke a, so daß eine rationale Funktion $\tilde{f}$ (eine Fortsetzung) existiert, die mit f überall dort übereinstimmt, wo f definiert ist, die aber zusätzlich auch bei a definiert ist.
Kriterium: Ist a eine Lücke von f, so überprüfe man, ob a auch Nullstelle des Zählerpolynoms ist. Ist dies der Fall, so spalte man in Zähler und Nenner den Linearfaktor $x - a$ so oft wie möglich ab und kürze. So erhält man den Term $\tilde{f}(x)$ der Fortsetzung $\tilde{f}$.
Ist a auch Lücke von $\tilde{f}$, so ist a ein Pol von f, andernfalls ist a eine hebbare Lücke von f.

2) a) Nennerpolynom $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Damit ist $+2$ die einzige Lücke von f. $+2$ ist aber auch Nullstelle des Zählers, daher kürzt man so weit wie möglich den Linearfaktor $x-2$ heraus und erhält danach

$$\tilde{f}_1(x) = \frac{1}{x-2}\,.$$

$+2$ ist auch nach Kürzen noch eine Lücke, also ein Pol der Funktion f_1.
b) Nennerpolynom $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Die Lücken von f_2 sind -2 und $+2$. Durch Einsetzen stellt man fest: $+2$ und -2 sind keine Nullstellen des Zählers, also Pole von f_2.
c) Mit p, q-Formel oder dem Satz von Vieta findet man die Nullstellen des Nennerpolynoms $(+1, -2)$ und damit die Zerlegung

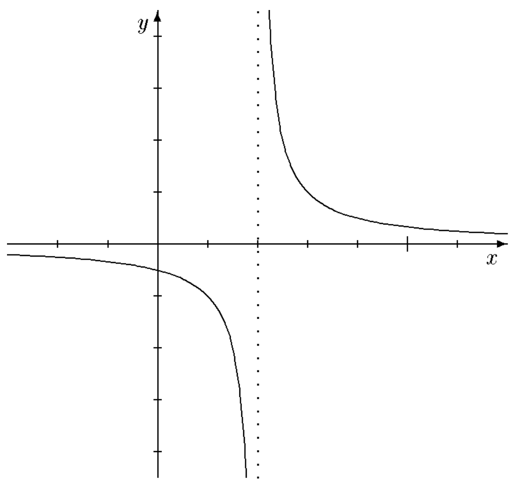
$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)\,.$$

Die Lücken sind $+1$ und -2, wobei $+1$ ein Pol ist, während -2 eine hebbare Lücke ist. Der gekürzte Funktionsterm ist

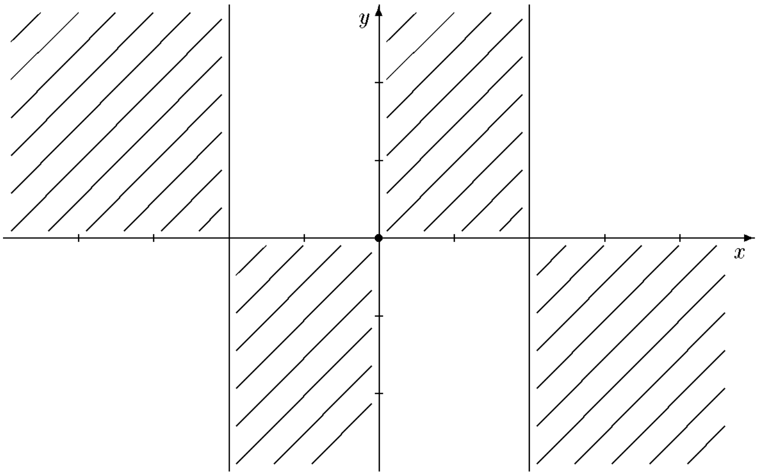
$$\tilde{f}_3(x) = \frac{1}{x-1}\,.$$

d) Das Nennerpolynom $x^2 + 1$ hat keine Nullstelle ($x^2 + 1 \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$), also liegen keine Lücken vor. Diese rationale Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert!

3) a) Es ist $\tilde{f}_1(x) = \frac{1}{x-2}$. Dieser Funktionsterm entsteht aus $\frac{1}{x}$, indem man x durch $x - 2$ ersetzt; dies bedeutet, daß der Graph von f_1 aus dem bekannten Graphen von $\frac{1}{x}$ durch *Verschiebung um $+2$ in x-Richtung* entsteht! (Vgl. zweites Semester, Verschiebung von Parabeln!) Dies ergibt den nachfolgenden Funktionsverlauf:

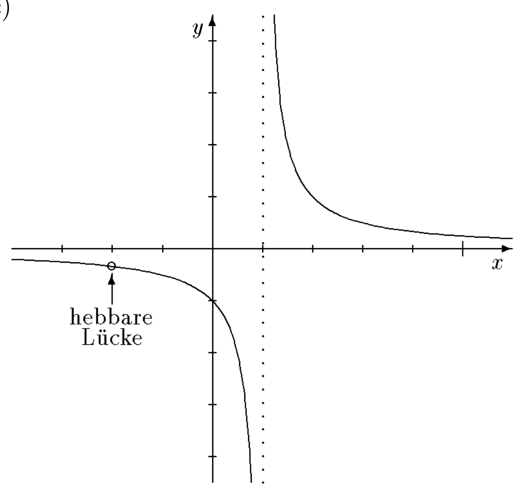


b) Die Funktion f_2 hat zwei Pole bei $+2$ und -2; beide sind einfach, also mit Vorzeichenwechsel. Weitere Vorzeichenwechsel können nur noch bei den Nullstellen von f_2 auftreten. Nullstellen von f_2 sind Nullstellen des Zählers. Dieser ist (Ausklammern!) $x(x^2 - x + 6)$. Der quadratische Faktor hat keine Nullstelle (p, q-Formel). Damit ist 0 einzige Nullstelle von f_2. Diese ist einfach, also liegt auch hier ein Vorzeichenwechsel vor. Insgesamt wechselt $f_2(x)$ das Vorzeichen an den Stellen -2, 0 und $+2$. Da für 'große' Werte von x die Werte $f_2(x)$ positiv sind, erhält man die in der folgenden Skizze schraffierten Bereiche, in denen der Graph von f_2 *nicht* verlaufen kann.

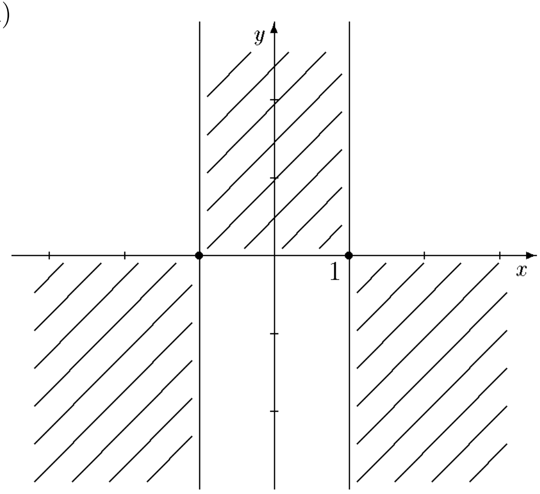


c) Der Graph der fortgesetzten Funktion $\tilde{f}_3(x) = \dfrac{1}{x-1}$ entsteht aus dem bekannten Graphen von $\frac{1}{x}$ durch Verschiebung um $+1$ in x-Richtung. Dies ergibt den nachfolgend links skizzierten Verlauf des Graphen von f_3; die hebbare Lücke bei $x = -2$ ist markiert.

c)



d)

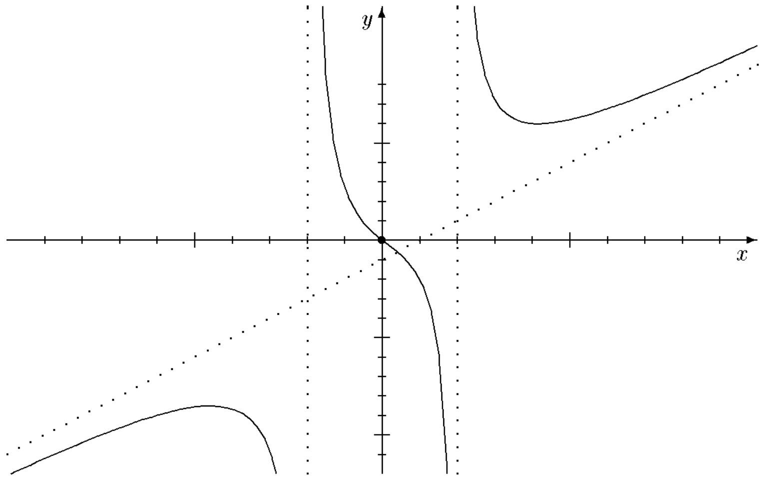


d) Die Funktion f_4 hat keine Lücken, aber zwei Nullstellen bei ± 1 (der Zähler ist $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$). Da beide Nullstellen einfach sind, liegt dort jeweils ein Vorzeichenwechsel vor. Der Nenner ist stets positiv, so daß die Funktion f_4 dieselbe Vorzeichenverteilung hat wie der Zählerterm $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. In der obigen rechten Skizze sind wieder die Bereiche schraffiert, in denen der Graph von f_4 *nicht* verlaufen kann:

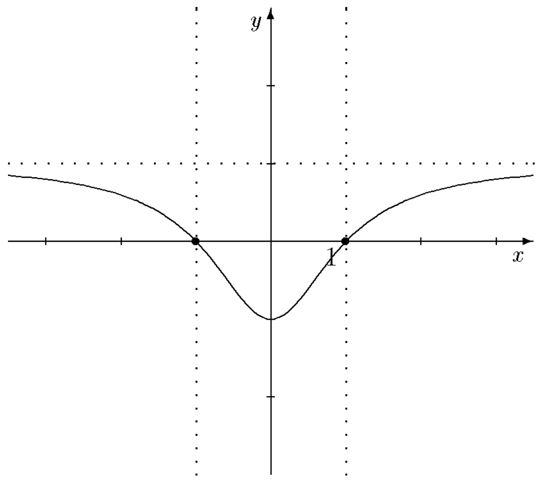
4) Eine Untersuchung der gegebenen Graphen auf Asymptoten ergibt:
a), c): Bei f_1 und f_3 ist jeweils der Zählergrad kleiner als der Nennergrad, also ist die x-Achse Asymptote. (Dies entspricht auch dem bereits gefundenen Verlauf der Funktionsgraphen.)
b) Bei f_2 ist der Zählergrad um 1 größer als der Nennergrad. Daher existiert auch hier eine Asymptote; diese ist 'schräg', d. h. nicht parallel zur x-Achse. Ihr Anstieg ist gegeben durch den Quotienten der führenden Koeffizienten von Zähler und Nenner; der Asymptoten-Anstieg ist also 1. Um die volle Gleichung der Asymptoten zu bestimmen, führt man Polynomdivision für f_2 durch, d. h. man dividiert mit Rest den Zähler von f_2 durch den Nenner von f_2. Dies ergibt:

$$(x^3 - x^2 + 6x) : (x^2 - 4) = x - 1 + \frac{10x - 4}{x^2 - 4}\,.$$

Damit ist $y = x - 1$ Gleichung für die die Asymptote. Die Skizze ergibt nun unter Beachtung aller bisher gefundenen Fakten:



d) Bei f_4 stimmen Zählergrad und Nennergrad überein; es gibt also eine waagerechte Asymptote. Der Quotient der führenden Koeffizienten von Zähler und Nenner ist 1, also ist in diesem Falle $y = 1$ eine Gleichung für die Asymptote. Als Skizze eines möglichen Verlaufs von f_4 erhält man:



Übungen (4)

1) a) Definieren Sie den Differenzenquotienten einer Funktion f zu einer Stelle a und den Ableitungswert $f'(a)$.
   b) Geben Sie für die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ den Differenzenquotienten zur Stelle $a \neq 0$ an und stellen Sie diesen als rationale Funktion dar.
   c) Bestimmen Sie dann $f'(a)$.
   d) Führen Sie dasselbe für $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ und beliebiges $a \in \mathbb{D}(f)$ durch.
2) a) Formulieren Sie die Ihnen bekannten Ableitungsregeln.
   b) Leiten Sie eine dieser Regeln her.
   c) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen f die Ableitungsfunktionen f':
      i) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$,
      ii) $f(x) = (x^3 - 3x)^2 - 5x^2 + 1$,
      iii) $f(x) = 4x^2 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}$,
      iv) $f(x) = 6\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}}$.
3) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^2$ eine Formel für die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle a (in der Standardform $y = mx + b$).
   [Man kann das gefundene Ergebnis in eine Konstruktionsvorschrift zur geometrischen Konstruktion der Tangente an die Normalparabel umsetzen. Siehe Buch, S. 132, Aufgabe 1.a).]
4) Buch S. 150, Nr. 11.
5) Gegeben $f(x) = 12x^5 + 15x^4 - 40x^3 + 4$.
   a) Bestimmen Sie Gleichungen für die Tangenten an den Graphen von f mit dem Berührpunkt $P_1 = (-1\,|?)$ bzw. $P_2 = (2\,|?)$. Wo schneiden sich die beiden Tangenten?
   b) An welchen Stellen hat der Graph von f waagerechte Tangenten? Bestimmen Sie die zugehörigen Punkte des Graphen.
6) a) Bestimmen Sie die Berührpunkte all der Tangenten an die Normalparabel, die durch den Punkt $Q = (0 \mid -1)$ verlaufen.
   b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe für $Q = (-1| - 3)$ bzw. $Q = (1 \mid 2)$.
7) Untersuchen Sie, ob sich die Graphen der Funktionen $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x + 20$ und $g(x) = x^3 - 6x^2 + 18x - 24$ berühren. Bestimmen Sie ggf. die Berührpunkte.

Übungen (4) — Lösungen

1) a) Der Differenzenquotient zur Funktion f und Stelle a (die im Definitionsbereich von f liegen muß) ist gegeben durch

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

Die Funktion f ist an der Stelle a differenzierbar, wenn bei beliebiger Annäherung von x an die Stelle a der Differenzenquotient sich stets ein und derselben reellen Zahl annähert. Diese Zahl wird dann mit $f'(a)$ bezeichnet und heißt Ableitungswert von f an der Stelle a:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

b) Für $f(x)=1/x$ und $a\neq 0$ ergibt sich als Differenzenquotient

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a}=\frac{(a-x)}{xa\cdot(x-a)}=\frac{-1}{xa}\,.$$

Nähert sich nun x der Stelle a beliebig nahe an, so nähert sich der Differenzenquotient immer mehr dem Wert $-1/aa=-1/a^2$:

$$f(x)=\frac{1}{x}\implies f'(a)=-\frac{1}{a^2}\,.$$

Hiermit haben wir die Ableitungsformel für die Funktion $f(x)=1/x$ hergeleitet; sie läßt sich am besten in folgender Form behalten:

$$f(x)=x^{-1}\implies f'(x)=(-1)x^{-2}\,,$$

mit anderen Worten:

- *Unsere 'alte' Ableitungsformel $f(x)=x^n\Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$ bleibt auch für $n=-1$ gültig!* **Anm.:** *Sie bleibt sogar für alle rationalen Exponenten gültig!*

c) Wieder bestimmen wir den Differenzenquotienten und stellen ihn als rationale Funktion dar. Sei $a\in\mathbb{D}(f)$, also $2a+1\neq 0$. Dann gilt für $x\in\mathbb{D}(f)$, $x\neq a$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}&=\frac{1}{x-a}(f(x)-f(a))=\frac{1}{x-a}\cdot\Big(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2a+1}\Big)\\&=\frac{1}{x-a}\cdot\frac{(2a+1)-(2x+1)}{(2x+1)(2a+1)}=\frac{2(a-x)}{(x-a)(2x+1)(2a+1)}=\frac{-2}{(2x+1)(2a+1)}\end{aligned}$$

In dieser Form kann man nun den Grenzübergang für $x\to a$ durchführen und erhält

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\frac{2}{(2x+1)(2a+1)}\longrightarrow-\frac{2}{(2a+1)(2a+1)}=-\frac{2}{(2a+1)^2}\,.$$

Damit haben wir gezeigt: $f'(a)=-\dfrac{2}{(2a+1)^2}$.

2) a) *Ableitung der Potenzfunktionen:* Die Funktionen f_n gegeben durch $f_n(x)=x^n$ sind für alle natürlichen Zahlen $n\in\mathbb{N}$ differenzierbar mit der Ableitungsfunktion $f_n'(x)=nx^{n-1}$.
Faktorregel: Ist die Funktion g differenzierbar an der Stelle a, so ist für jede reelle Zahl $c\in\mathbb{R}$ auch die Funktion f mit $f(x)=c\cdot g(x)$ differenzierbar bei a und es gilt: $f'(a)=c\cdot g'(a)$.
Summenregel: Sind die Funktionen g und h an der Stelle a differenzierbar, so ist auch die Summenfunktion f gegeben durch $f(x)=g(x)+h(x)$ bei a differenzierbar und es gilt: $f'(a)=g'(a)+h'(a)$.
b) Der Differenzenquotient zur Funktion f, $f(x)=g(x)+h(x)$, ist

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}&=\frac{(g(x)+h(x))-(g(a)+h(a))}{x-a}\\&=\frac{g(x)-g(a)\;+\;h(x)-h(a)}{x-a}=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+\frac{h(x)-h(a)}{x-a}\,.\end{aligned}$$

Nähert sich nun x beliebig der Stelle a an, so streben die beiden letzten Summanden (die Differenzenquotienten von g und h) nach Voraussetzung gegen $g'(a)$ bzw. $h'(a)$. Dies zeigt, daß der Differenzenquotient von f sich immer mehr ein und derselben Zahl annähert, nämlich dem Wert $g'(a)+h'(a)$. Dies besagt aber nichts anderes als: Der Ableitungswert $f'(a)$ existiert und ist gegeben durch $g'(a)+h'(a)$.
c) i) $f'(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$.
ii) Hier muß man — bei unserem derzeitigen Kenntnisstand — zunächst ausmultiplizieren, um $f(x)$ auf die Standardform eines Polynomterms zu bringen und dann die Ableitungsregel (Satz (3.8)) anwenden zu können.
$f(x) = x^6 - 6x^4 + 4x^2 + 1$, $f'(x) = 6x^5 - 24x^3 + 8x$.
iii) Wir stellen f durch Potenzfunktionen (mit negativen Exponenten) dar, um die allgemeine Potenzregel anwenden zu können:

$$f(x) = 4x^2 + 5x^{-1} - 6x^{-2} \implies f'(x) = 8x - 5x^{-2} + 12x^{-3} = 8x - \frac{5}{x^2} + \frac{12}{x^3}\,.$$

iv) Hier verfahren wir wie bei iii), nur daß jetzt sogar gebrochene Exponenten auftreten.

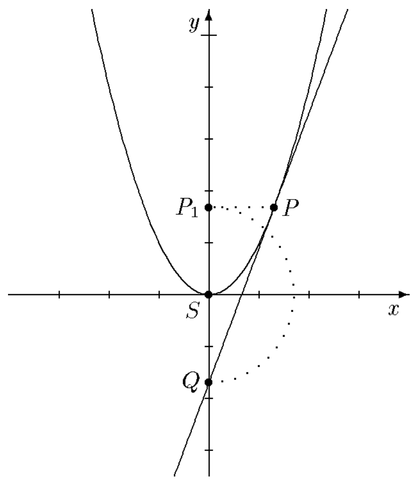
$$f(x) = 6x^{1/2} + 6x^{-1/2} \implies f'(x) = 3x^{-1/2} - 3x^{-3/2} = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x^3}}\,.$$

3)
Die allgemeine Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an einer Stelle a ist gegeben durch

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

also für $f(x) = x^2$:

$$y = a^2 + 2a(x-a) = a^2 + 2ax - 2a^2 = 2ax - a^2\,.$$



Der y-Achsenabschnitt der Tangente ist also $-a^2$. Die Tangente verläuft somit durch den Berührpunkt $P = (a \mid f(a)) = (a \mid a^2)$ und den Punkt $Q = (0 \mid -a^2)$.
Man konstruiert nun die Tangente, indem man Q konstruiert und mit P verbindet. Die nebenstehende Skizze veranschaulicht die Konstruktion von Q:
Man fälle vom Punkt P aus das Lot auf die Symmetrieachse der Parabel; man erhält einen Lotfußpunkt P_1.
Nun zeichne man einen Kreis um den Scheitelpunkt S durch den Lotfußpunkt P_1. Der zweite Schnittpunkt mit der Symmetrieachse ist der gesuchte Punkt Q.
Die Verbindungsgerade von P und Q ist die Tangente an die Normalparabel im Punkt P.

4) a) Da die Punkte auf dem Graphen liegen sollen, gilt $P = (1 \mid f(1)) = (1 \mid 3)$ und $S = (3 \mid f(3)) = (3 \mid 29)$. Der Anstieg der Sekanten durch P und S ist daher

$$m = \frac{29-3}{3-1} = 13\,.$$

Gesucht ist jetzt eine parallele Tangente, also mit Tangentenanstieg $f'(x) = 13$. Wegen $f'(x) = 4x+5$ ergibt sich die einzige Lösung $x = 2$. Der Berührpunkt ist dann der Punkt $B = (2 \mid f(2)) = (2 \mid 14)$.
b) Genauso erhält man in b) die Punkte $P = (-1 \mid 19)$, $S = (0 \mid 6)$, den Sekantenanstieg $m = -13$, die Gleichung $-13 = f'(x) = 8x - 9$ und die einzige Lösung $x = -1/2$. Der gesuchte Berührpunkt ist $B = (-1/2 \mid 23/2)$.
c) $P = (0 \mid 4)$, $S = (1 \mid 8)$, Sekantenanstieg $m = 4$, Gleichung $f'(x) = 4$. Wir berechnen zunächst die Ableitung von $f(x) = 3x + 4 + x^{1/2}$:

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

und lösen nun die Gleichung $f'(x) = 4$: f' ist nur für $x > 0$ definiert. In diesem Bereich gilt

$$4 = f'(x) = 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff \sqrt{x} = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{4}\,.$$

Der gesuchte Berührpunkt ist $B = (1/4 \mid 21/4)$.
d) Ergebnis $B = (25/4 \mid 49/2)$.

5) a) Die Tangentengleichung zur Berührstelle a lautet für eine beliebige Funktion $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Wir berechnen $f'(x) = 60x^4 + 60x^3 - 120x^2$ und erhalten für die beiden Stellen $a_1 = -1$ und $a_2 = 2$ die Werte $f(-1) = 47$, $f'(-1) = -120$ bzw. $f(2) = 308$, $f'(2) = 960$. Damit lauten die Tangentengleichungen:

$$\begin{aligned} \text{Tangentengleichung für } a = -1: \quad & y = 47 - 120(x+1) = -120x - 73\,, \\ \text{Tangentengleichung für } a = 2: \quad & y = 308 + 960(x-2) = 960x - 1612\,. \end{aligned}$$

Die Schnittstelle der beiden Tangenten erhält man als Lösung der Gleichung

$$-120x - 73 = 960x - 1612 \iff 1080x = 1539 \iff x = \frac{57}{40} = 1{,}425\,.$$

Die y-Koordinate des Schnittpunktes S der beiden Tangenten erhält man, indem man die Schnittstelle $\frac{57}{40}$ in eine der Tangentengleichungen einsetzt:

$$-120 \cdot \frac{57}{40} - 73 = -171 - 73 = -244 \implies S = (\frac{57}{40} \mid -244)\,.$$

b) Waagerechte Tangenten liegen vor, wenn der Tangentenanstieg Null ist. Wir lösen also die Gleichung

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 60x^4 + 60x^3 - 120x = 0 \\ &\iff x^2(x^2 + x - 2) = 0 \iff x^2(x+2)(x-1) = 0\,. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind 0, -2 und $+1$. Dies sind *Stellen,* an denen f eine waagerechte Tangente hat. Die zugehörigen Graphenpunkte sind

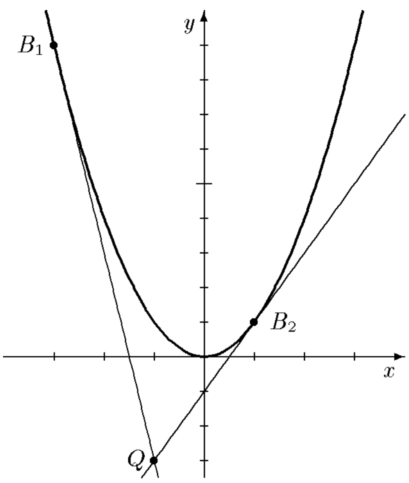
$$\begin{aligned} &P_1 = (-2 \mid f(-2)) = (-2 \mid 180)\,, \quad P_2 = (0 \mid f(0)) = (0 \mid 4) \\ &\text{und } P_3 = (1 \mid f(1)) = (1 \mid -9)\,. \end{aligned}$$

6) a) Die Tangente an die Normalparabel mit Berührstelle a hat die Gleichung $y = f(a) + f'(a)(x-a) = a^2 + 2a(x-a) = a^2 + 2ax - 2a^2 = 2ax - a^2$. Soll die Tangente durch den Punkt $Q = (0 \mid -1)$ verlaufen, so muß $-a^2 = -1$, also $a^2 = 1$ sein. Damit ergeben sich zwei mögliche Berührstellen $a = \pm 1$. Die gesuchten Berühr*punkte* sind $(a \mid f(a))$, also $B_1 = (-1 \mid 1)$ und $B_2 = (1 \mid 1)$.

b) Wieder gehen wir von der Tangentengleichung $y = 2ax - a^2$ aus. Da der Punkt $Q = (-1 \mid -3)$ auf der Tangente liegen soll, müssen seine Koordinaten die Tangentengleichung erfüllen, es muß also gelten:

$$-3 = 2a \cdot (-1) - a^2\,.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für die gesuchte Größe a ($a^2 + 2a - 3 = 0$); man findet als Lösungen $a = -3$ und $a = +1$. Die zugehörigen Berührpunkte sind $B_1 = (-3|9)$ und $B_2 = (1|1)$. Die nebenstehende Skizze veranschaulicht die gefundenen Ergebnisse.



Mit denselben Überlegungen wird man für den Punkt $Q = (1 \mid 2)$ auf die quadratische Gleichung $a^2 - 2a + 2 = 0$ geführt, die keine Lösung besitzt. Damit gibt es auch keine Tangenten an die Normalparabel, die durch diesen Punkt verlaufen.

7) Berührpunkte zweier Funktionsgraphen sind gemeinsame Punkte beider Graphen, an denen die Anstiege identisch sind. Man sucht also *Stellen* x mit den beiden Eigenschaften:

$$f(x) = g(x) \text{ und } f'(x) = g'(x)\,.$$

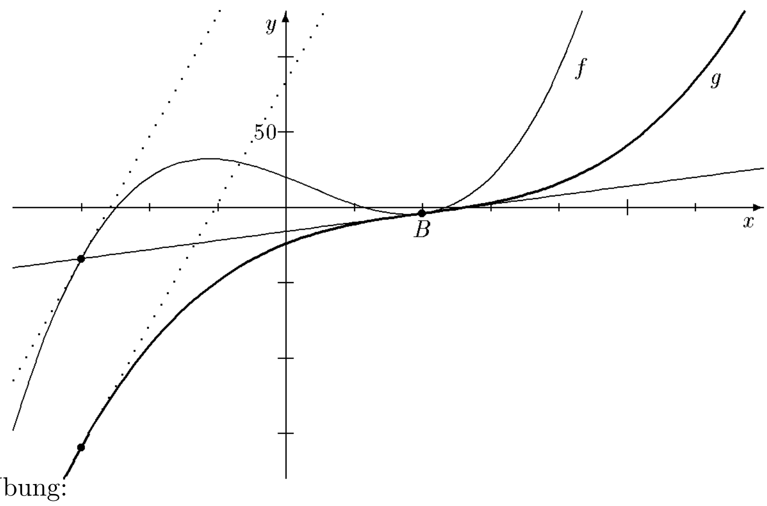
Dabei handelt es sich um *zwei* Gleichungen mit einer Unbekannten. Diese kann man lösen, indem man zunächst eine der beiden löst, und dann (durch Einsetzen) überprüft, ob die gefundenen Lösungen auch die andere Gleichung erfüllen.
Welche Gleichung man zunächst löst, ist dabei vom logischen Standpunkt her beliebig. Vom praktischen Standpunkt aus jedoch nicht, da die Gleichung $f'(a) = g'(a)$ für ganzrationale Funktionen von kleinerem Grad und damit in der Regel von geringerem Schwierigkeitsgrad ist. Im vorliegenden konkreten Fall gilt

$$f'(x) = g'(x) \iff 9x^2 - 6x - 18 = 3x^2 - 12x + 18 \iff 6x^2 + 6x - 36 = 0$$
$$\iff x^2 + x - 6 = 0 \iff (x+3)(x-2) = 0 \iff x = -3 \vee x = 2\,.$$

Damit hat man zwei Stellen gefunden, an denen die beiden Graphen parallele Tangenten haben. Berührpunkte liegen aber nur dann vor, wenn die zugehörigen Punkte auf dem Graphen übereinstimmen. Man berechnet daher zu den gefundenen *Stellen* (=x-Koordinaten) die zugehörigen y-Koordinaten der Punkte auf dem jeweiligen Graphen.

$$f(-3) = -34\,,\ g(-3) = -159 \quad \text{und} \quad f(2) = -4\,,\ g(2) = -4\,.$$

Damit ist nur die Zahl 2 eine Lösung *beider* Gleichungen $f(x) = g(x)\,,\ f'(x) = g'(x)$. Es gibt also nur einen Berührpunkt, dieser ist $B = (2 \mid -4)$.
Nachfolgend eine Skizze beider Funktionen. Eingezeichnet sind die beiden parallelen Tangenten an der Stelle -3 und die gemeinsame Tangente an der Stelle 2.



Ergänzende Übung:
Berechnen Sie alle Schnittstellen der beiden Graphen. Was fällt Ihnen auf?

Übungen (5)

1) Formulieren Sie in Ihren eigenen Worten den fundamentalen Zusammenhang zwischen Ableitungsfunktion f' und Ausgangsfunktion f, insbesondere im Hinblick auf die nachfolgenden Aufgaben.
2) Gegeben sind die Funktionen
   i) $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + 4x - 1$,
   ii) $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 1$,
   iii) $f(x) = (x^2 - x)^2$,
   iv) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2$.
   a) Bestimmen Sie für diese Funktionen die 'Monotonieintervalle', d. h. die Bereiche, in denen die Funktionswerte steigen bzw. fallen.
   b) Bestimmen Sie sämtliche Extremstellen dieser Funktionen und entscheiden Sie, ob ein Maximum (Hoch-) oder Minimum (Tiefpunkt) vorliegt.
   c) Bestimmen Sie gegebenenfalls die Sattelpunkte.
   d) Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- , Tief- und Sattelpunkte und geben Sie eine grobe Skizze der Graphen.
3) a) Beweisen Sie: Eine beliebige ganzrationale Funktion f dritten Grades besitzt entweder je einen Hoch- und Tiefpunkt oder gar kein Extremum.
   Kann eine derartige Funktion einen Sattelpunkt *und* einen Extrempunkt haben?
   b) Wieviele Extrempunkte kann eine ganzrationale Funktion vierten Grades haben? Machen Sie möglichst genaue Aussagen.
   Eine ganzrationale Funktion 4. Grades habe einen Sattelpunkt. Zeigen Sie, daß sie dann genau einen Extrempunkt haben muß.
   c) Was können Sie allgemein über die Anzahl der Extrempunkte einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades aussagen?
4) Gegeben sind die nachfolgenden Funktionen:
   i) $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 40x^3 - 120x^2 + 240x - 180$,
   ii) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 20$,
   iii) $f(x) = 4x^5 + 25x^4 + 20x^3 - 90x^2 - 100$,
   iv) $f(x) = 45x^4 + 24x^5 - 10x^6$.
   a) Untersuchen Sie diese auf (lokale) Extrema und bestimmen Sie die Extremstellen sowie die Extrem*werte.*
   b) Welche der Funktionen haben einen *absolut* größten oder kleinsten Wert? Bestimmen Sie auch diesen.
   c) Bestimmen Sie für alle Funktionen sowohl den größten als auch den kleinsten Wert, den sie *über dem Intervall* $[-2, 3]$, d. h. im Bereich $-2 \leq x \leq 3$, annehmen.

Übungen (5) — Lösungen

1) Der Wert $f'(x)$ der Ableitungsfunktion an einer beliebigen Stelle x ist der Anstieg der Funktion f an dieser Stelle. Für die Monotonie bedeutet dies: In den Intervallen (zusammenhängenden Bereichen), in denen die Ableitungsfunktion f' positive Werte hat, steigt die Funktion f ständig an. Wo f' negative Werte hat, fällt f ständig.
2) a) Man muß die Abschnitte auf der x-Achse bestimmen, in denen die Werte $f'(x)$ *der Ableitungsfunktion* f' einheitliches Vorzeichen haben, man muß also die Vorzeichenverteilung *von* f' (!) bestimmen. Diese wiederum erhält man, indem man *alle* Nullstellen *mit* Vorzeichenwechsel ermittelt.
i) $f'(x) = 8x^3 - 4x + 4$ hat offenbar -1 als Nullstelle. Abspalten des zugehörigen Linearfaktors $x + 1$ ergibt $f'(x) = (x + 1)(8x^2 - 8x + 4)$. Die p, q-Formel zeigt, daß der quadratische Restfaktor keine Nullstelle mehr hat. -1 ist also die einzige Nullstelle von f', und zwar mit der Ordnung 1, also mit Vorzeichenwechsel. Da der führende Koeffizient von f' positiv ist, erhält man die folgende Tabelle:

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	< 0	|	> 0
$f(x)$	fällt	|	steigt

b),c) Diese Übersicht über die Monotonieintervalle zeigt insbesondere, daß bei -1 die Funktion ein Minimum hat; der Tiefpunkt von f ist $T = (-1|f(-1)) = (-1|-5)$. Weitere Extremstellen besitzt f nicht, da f' keine weiteren Nullstellen besitzt. Aus den gleichen Gründen gibt es keinen Sattelpunkt.
ii) $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x = x(5x^3 - 3x + 2)$ hat die Nullstelle 0 und -1 ist Nullstelle des kubischen Faktors. (Die Koeffizienten 5,3,2 (5=3+2) lassen ± 1 als Nullstelle vermuten.) Also

$$f'(x) = x(x + 1)(5x^2 - 5x + 2)\,.$$

Wieder zeigt die p, q-Formel, daß der verbleibende quadratische Faktor keine reelle Nullstelle besitzt. Da beide Nullstellen (-1 und 0) einfach sind, liegt jeweils ein Vorzeichenwechsel vor, man erhält also die Tabelle

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	> 0	|	< 0	|	> 0
$f(x)$	steigt	|	fällt	|	steigt

Damit hat f bei -1 ein Maximum (f' hat dort eine Nullstelle *mit Vorzeichenwechsel* von '+' nach '−') und bei 0 ein Minimum. Weitere Extremstellen oder Sattelstellen gibt es nicht, da f' keine weiteren Nullstellen hat. Hoch- und Tiefpunkt sind: $H = (-1|f(-1)) = (-1|2)$ und $T = (0|f(0)) = (0|1)$.
iii) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$, also $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = x(4x^2 - 6x + 2)$ hat neben 0 noch die Nullstelle $+1$ (6=4+2 !). Damit läßt sich aus dem quadratischen Term der Linearfaktor $x - 1$ abspalten, der verbleibende Faktor muß dann zwangsläufig $4x - 2$ sein:

$$f'(x) = x(x - 1)(4x - 2).$$

f' hat also drei verschiedene Nullstellen, 0, 1/2 und 1, jeweils von der Ordnung 1, also jeweils mit Vorzeichenwechsel. Daraus ergibt sich die folgende Tabelle

	$x <$	0	$< x <$	$\frac{1}{2}$	$< x <$	$+1$	$< x$
$f'(x)$	< 0	|	> 0	|	< 0	|	> 0
$f(x)$	fällt	|	steigt	|	fällt	|	steigt

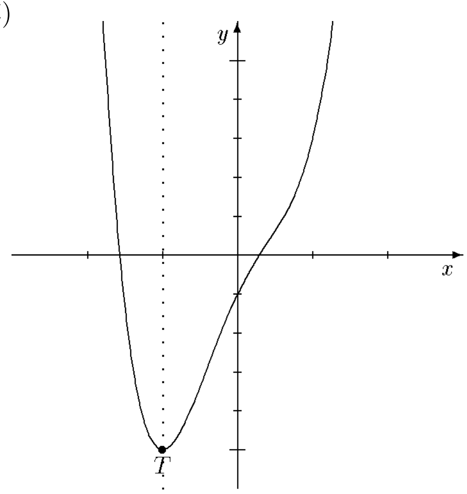
Da f' an allen Nullstellen sein Vorzeichen wechselt, sind alle diese Nullstellen von f' Extremstellen von f; und zwar:
Bei 0 hat f ein erstes Minimum mit Tiefpunkt $T_1 = (0|f(0)) = (0|0)$,
bei 1/2 hat f ein Maximum mit Hochpunkt $H = (\frac{1}{2} \mid f(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2} \mid \frac{1}{16})$, und
bei 1 hat f ein zweites Minimum mit Tiefpunkt $T_2 = (1|f(1)) = (1|0)$.
iv) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$. f' hat also bei 0 eine doppelte Nullstelle und bei $+1$ eine

einfache. Damit liegt bei $+1$ ein Vorzeichenwechsel von f' vor, nicht jedoch bei 0. Man erhält so die folgende Übersicht über die Vorzeichenverteilung von f' und das Monotonieverhalten von f:

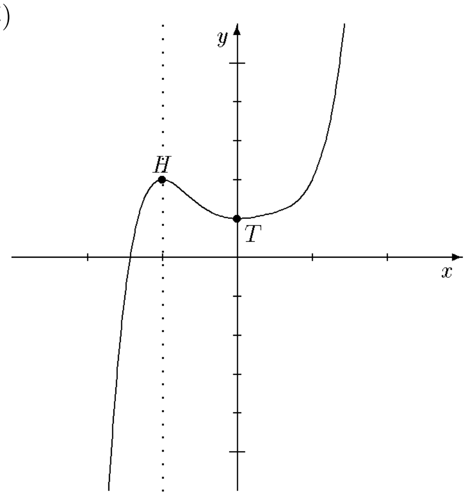
	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x$
$f'(x)$	< 0	< 0	> 0
$f(x)$	fällt	fällt	steigt

Dies zeigt, daß bei $+1$ ein Extremum vorliegt, und zwar ein Minimum; der Tiefpunkt ist $T = (1 \mid f(1)) = (1 \mid -3)$. Bei 0 liegt jedoch *kein* Extremum vor, da f' dort nicht sein Vorzeichen wechselt. Dort liegt ein Sattelpunkt: $S = (0 \mid f(0)) = (0 \mid -2)$.
Damit erhält man die folgenden, groben Skizzen:

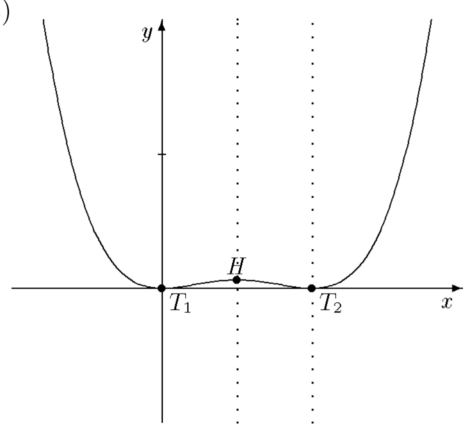
i)



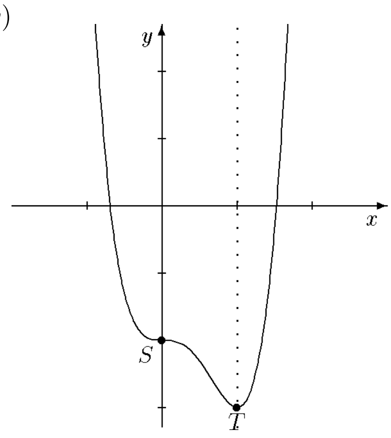
ii)



iii)



iv)



3) a) Eine beliebige ganzrationale Funktion dritten Grades hat einen Funktionsterm der Form

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0\,.$$

Damit hat $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ den Grad 2 und es liegt eine der folgenden drei Möglichkeiten vor:
1. f' hat keine Nullstelle, f also kein Extremum.
2. f' hat nur eine Nullstelle; diese muß dann doppelt sein, so daß f' dort sein Vorzeichen *nicht* wechselt. Wieder hat f kein Extremum.
3. f' hat zwei verschiedene Nullstellen; diese sind dann beide von erster Ordnung, also hat dort f' jeweils einen Vorzeichenwechsel, und zwar einmal von '+' nach '−' und einmal umgekehrt. Dies bedeutet: f hat an beiden Nullstellen von f' ein Extremum, und zwar einmal ein Maximum und einmal ein Minimum.
Die Zusatzfrage betrifft den Fall 2.: Hat f einen Sattelpunkt, so hat f' eine Nullstelle *ohne* Vorzeichenwechsel, also eine mindestens zweifache Nullstelle. Dann kann aber die *quadratische* Funktion f'

keine weitere Nullstelle besitzen, f also keinen Extrempunkt.
b) Die Ableitung f' ist in diesem Falle vom Grade 3. Damit hat f' mindestens eine und höchstens drei Nullstellen.
Wenn *drei* Nullstellen vorliegen, sind sie alle einfach; f hat also drei Extremstellen.
Liegen nur *zwei* Nullstellen bei f' vor, so muß eine doppelt sein. (Wären nämlich beide einfach, so könnte man die Linearfaktoren abspalten und es bliebe ein weiterer Linearfaktor mit einer weiteren Nullstelle übrig!) Bei einer einfachen und einer doppelten Nullstelle von f' hat f einen Extrem- und einen Sattelpunkt.
Liegt nur *eine* Nullstelle vor, so ist diese einfach oder dreifach. (Argumentation wie eben.) In jedem Falle hat f dann einen Extrempunkt. Fazit:
Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat einen oder drei Extrempunkte. Liegt ein Sattelpunkt vor, so gibt es genau einen Extrempunkt.
c) Die Ableitung f' hat den Grad $n-1$, also höchsten $n-1$ Nullstellen; f hat also höchstens $n-1$ Extrempunkte.

4) i) a) $f'(x) = 15(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16)$ hat $+2$ als Nullstelle. Polynomdivision ergibt $f'(x) = 15(x-2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$. Der kubische Faktor hat erneut $+2$ als Nullstelle und man erhält $f'(x) = 15(x-2)^2(x^2+4)$. Damit hat f' nur eine Nullstelle, diese ist doppelt, also ohne VZW. Folglich besitzt f kein Extremum, aber bei $+2$ einen Sattelpunkt: $S = (2 \mid f(2)) = (2 \mid -4)$.
b) Da f kein Extremum besitzt, ist f monoton, und zwar monoton steigend, da $f'(x) = 15(x-2)^2(x^2+4)$ keine negativen Werte annimmt. f hat also weder einen absolut größten noch einen absolut kleinsten Wert.
c) Da f monoton steigt, ist $f(-2) = -1796$ der kleinste und $f(3) = 54$ der größte Wert, den f über dem Intervall $[-2, 3]$ annimmt.
ii) a) $f'(x) = 12x(x^2-x-2) = 12x(x+1)(x-2)$ hat drei einfache Nullstellen, und zwar bei -1, 0 und $+2$. Da dort jeweils ein VZW von f' vorliegt, sind dies (lokale) Extremstellen von f. Die Extremwerte sind $f(-1) = 15$, $f(0) = 20$ und $f(2) = -12$. Die (lokalen) Extrempunkte sind $T_1 = (-1 \mid 15)$ erster Tiefpunkt, $H = (0 \mid 20)$ Hochpunkt und $T_2 = (2 \mid -12)$ zweiter Tiefpunkt.
b) Da die Funktionswerte $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ über alle Grenzen wachsen (f hat geraden Grad und positiven führenden Koeffizienten), besitzt f keinen absolut größten Wert, wohl aber einen *absoluten* Tiefpunkt. Gemäß b) ist dies T_2: Der absolut kleinste Wert, den die Funktion annimmt, ist -12.
c) Um die Extremwerte über dem Intervall $[-2, 3]$ zu ermitteln, müssen wir neben den *in diesem Bereich* liegenden (lokalen) Extremstellen, noch die *Randwerte* $f(-2) = 52$ und $f(3) = 47$ berücksichtigen. Alle drei Extremstellen liegen in diesem Intervall; -12 ist damit auch der kleinste Wert von f, der in diesem Bereich angenommen wird. Vergleicht man den einzigen (lokalen) Maximalwert $f(0) = 20$ mit den Randwerten $f(-2) = 52$ und $f(3) = 47$, so erkennt man $f(-2) = 52$ als den größten *über diesem Intervall* angenommenen Wert von f.
iii) a) $f'(x) = 20x(x^3+5x^2+3x-9)$, also ist 0 einfache Nullstelle von f' und daher Extremstelle von f. Der kubische Faktor hat $+1$ als Nullstelle und Polynomdivision ergibt $f'(x) = 20x(x-1)(x^2 + 6x + 9) = 20x(x-1)(x+3)^2$. Damit hat f die Extremstellen 0 und $+1$ sowie die Sattelstelle -3. (Der Sattelpunkt ist $S = (-3 \mid f(-3)) = (-3 \mid -397)$.) Die Extremwerte sind $f(0) = -100$ und $f(1) = -141$; die Extrempunkte sind $H = (0 \mid -100)$ und $T = (1 \mid -141)$.
b) Da f von ungeradem Grad ist, hat f weder einen absolut größten noch einen absolut kleinsten Wert (Verhalten im Unendlichen!)
c) Wieder muß man die *im Intervall* gefundenen Extremwerte mit den *Randwerten* $f(-2) = -348$ und $f(3) = 2627$ vergleichen. Da die lokalen Extrema $f(0) = -100$ und $f(1) = -141$ dazwischen liegen, geben die Randwerte auch die über dem Intervall $[-2, 3]$ extremalen Werte an.
iv) a) $f'(x) = -60x^3(x^2 - 2x - 3) = -60x^3(x-3)(x+1)$ hat die Nullstellen 0 (dreifach) und -1, $+3$ jeweils einfach. Da immer ein VZW vorliegt, sind alle drei Stellen auch Extremstellen von f. Die Extremwerte sind $f(-1) = 11$, $f(0) = 0$ und $f(3) = 2187$.
b) Da f geraden Grad hat und der führende Koeffizient negativ ist, besitzt f einen absolut größten Wert, und dieser ist nach a) $f(3) = 2187$. Einen absolut kleinsten Wert besitzt f nicht wegen $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$.
c) Wieder vergleichen wir die lokalen Extremwerte mit den Randwerten $f(-2) = -688$ und $f(3) = 2187$ und erhalten -688 als kleinsten und 2187 als größten Wert von f über dem angegebenen Intervall.

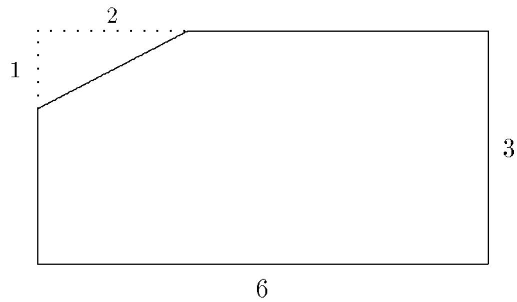
Übungen (6)

1) Aus 30 Zentimeter breitem Kupferblech soll eine Regenrinne mit rechteckigem Querschnitt geformt werden. Welche Höhe soll die Regenrinne erhalten, damit sie möglichst viel Wasser aufnehmen kann? Wie groß ist der dann entstehende Querschnitt? Kann man bei einer anderen Form der Regenrinne einen größeren Querschnitt erreichen?

2) Ein Bauer möchte auf einer Weide, die an einen Fluß grenzt, ein Teilstück für seinen Stier abgrenzen. Er hat noch 180 Meter Zaun im Schuppen und möchte eine möglichst große rechteckige Fläche entlang des Flusses einzäunen. Wie breit soll er den Streifen am Fluß wählen? Wie groß ist die dann entstehende Weide?

3) Mit einem Zaun der Länge l soll ein möglichst großes rechteckiges Feld abgegrenzt werden
a) auf offenem Gelände,
b) mit einer Seite an einer Mauer.
Wie sind (in Abhängigkeit von l) die Maße der eingezäunten Fläche zu wählen? Was bedeutet dies geometrisch? Welcher Flächeninhalt kann erreicht werden?

4) Einem Glaser ist beim Transport einer 3 mal 6 Meter großen Schaufensterscheibe eine Ecke von 1 mal 2 Meter abgebrochen (siehe Skizze). Wie kann man daraus parallel zu den alten Kanten eine neue rechteckige Scheibe mit möglichst großer Fläche schneiden?



Übungen (6)

1) Begründen Sie für beliebige differenzierbare Funktionen f und eine Stelle a im Definitionsbereich von f:
   a ist Sattelstelle von f genau dann, wenn a eine Wendestelle von f ist, an der die Tangente an den Graphen von f waagerecht verläuft.
   Sattelstelle '=' Wendestelle mit waagerechter Tangente.
2) Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen und skizzieren Sie ihre Graphen.
   a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$
   b) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$
   c) $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 27$
   d) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3$
   e) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 90x$
   Weitere Aufgaben: Lehrbuch S. 180/181, Nr. 4–8. (Bei 7c) und 7e) sind die Nullstellen nur näherungsweise bestimmbar.)
3) Gegeben sind die Funktionen f_k durch $f_k(x) = x^3 - 3x^2 + kx$ ($k \in \mathbb{R}$).
   a) Zeigen Sie, daß es genau einen Punkt gibt, den alle Funktionsgraphen gemeinsam haben. Bestimmen Sie ihn.
   b) Zeigen Sie, daß alle Funktionen dieselbe Wendestelle haben, und bestimmen Sie diese. Bestimmen Sie auch die Wendepunkte der f_k.
   c) In welcher Weise hängen Existenz und Lage der Extremstellen von k ab? Entscheiden Sie, welcher Art die Extremstellen sind.
4) Gegeben ist die Funktionenschar f_k ($k \in \mathbb{R}$) durch $f_k(x) = x^3 + kx$.
   a) Untersuchen Sie die Funktionen f_k und skizzieren Sie die Graphen von f_1, f_0, f_{-1}, f_{-3} in demselben Koordinatensystem.
   b) Welchen Wert muß k haben, damit f_k bei 1 ein Extremum hat? Welcher Art ist dieses dann?
   c) Welchen Wert muß k haben, damit bei 0 ein Wendepunkt vorliegt?
   d) Für welchen Wert von k hat f_k bei -2 ein Minimum?
5) Gesucht sind die Funktionen dritten Grades, deren Graph durch den Koordinatenursprung $O = (0 \mid 0)$ verläuft, $W = (2 \mid 4)$ als Wendepunkt hat, dessen zugehörige *Wendetangente* (= Tangente im Wendepunkt) den Anstieg -3 hat.

Übungen (6) — Lösungen

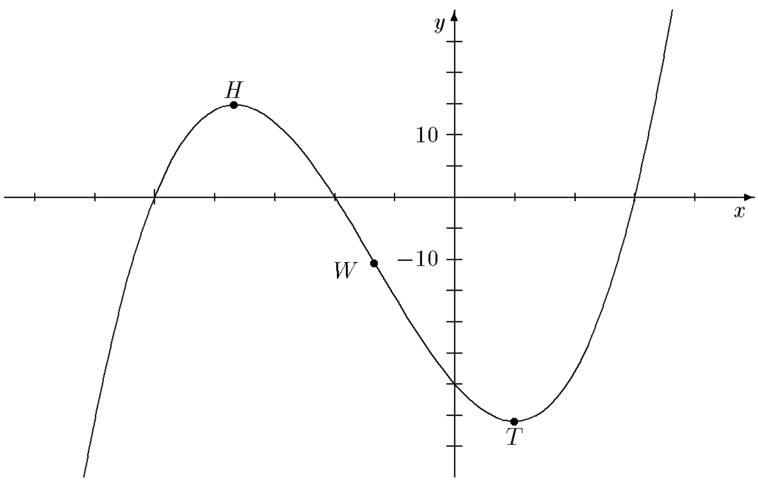
1) Eine Sattelstelle ist definitionsgemäß eine Nullstelle von f' ohne Vorzeichenwechsel. An einer Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel liegt aber notwendig ein Extremum vor. Damit ist a Extremstelle von f' und folglich Wendestelle von f.
Umgekehrt: Ist a eine Wendestelle von f, so ist a Extremstelle von f'. Zugleich soll bei a die Tangente an den Graphen von f waagerecht verlaufen, also $f'(a) = 0$ sein. Damit ist a eine Nullstelle von f', die zugleich Extremstelle von f' ist. Dann kann dort aber kein Vorzeichenwechsel stattfinden: a ist Nullstelle von f' ohne Vorzeichenwechsel, und das heißt, eine Sattelstelle von f.

2) a) Es ist $f(-2) = 0$, $f(x) : (x+2) = (x^2 + 2x - 15)$ und $x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3)$. Damit hat f die drei (einfachen) Nullstellen -2, -5 und $+3$.
Nullstellen von $f'(x) = 3x^2 + 8x - 11$:

$$
\begin{aligned}
3x^2 + 8x - 11 = 0 &\iff x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{11}{3} = 0 \\
&\iff x = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{33}{9}} = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9}} = -\frac{4}{3} \pm \frac{7}{3} \\
&\iff x = 1 \lor x = -\frac{11}{3}
\end{aligned}
$$

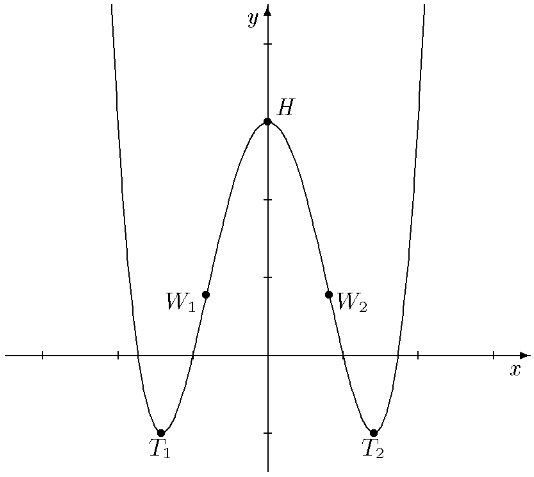
Beide Nullstellen von f' sind einfach, also Extremstellen von f. Da der führende Koeffizient von $f(x)$ (und damit auch der von $f'(x)$) positiv ist, ist $f'(x)$ schließlich positiv, $f(x)$ also schließlich monoton steigend, so daß der 'letzte' Extrempunkt ein Tiefpunkt sein muß: $T = (1 \mid f(1)) = (1 \mid -36)$, während der andere ein Hochpunkt ist: $H = (-11/3 \mid f(-11/3)) = (-11/3 \mid 400/27) \approx (-3.67 \mid 14.81)$.
Nullstellen von $f''(x) = 6x+8$: Die (einfache) Nullstelle bei $-4/3$ ist Wendestelle von f. Wendepunkt $W = (-4/3 \mid f(4/3)) = (-4/3 \mid -286/27) \approx (-1.33 \mid -10.60)$.

Skizze:

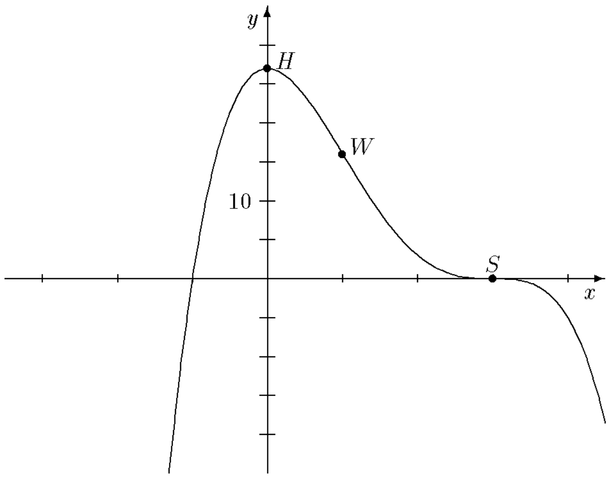


b) Die Funktion ist achsensymmetrisch. Ihre Nullstellen bestimmen wir mittels Substitution: ± 1 und $\pm\sqrt{3}$. Da es 4 verschiedene Nullstellen sind, müssen sie alle einfach sein.
$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$ hat die Nullstellen 0 und $\pm\sqrt{2}$, diese sind einfach, also Extremstellen von f. Die zugehörigen Extremwerte sind $f(0) = 3$, $f(\pm\sqrt{2}) = -1$. Da der führende Koeffizient von f positiv ist, ist der 'letzte' Extrempunkt ein Tiefpunkt: $T_2 = (\sqrt{2} \mid -1)$, der davor ein Hochpunkt: $H = (0 \mid 3)$ und schließlich davor wieder ein Tiefpunkt $T_1 = (-\sqrt{2} \mid -1)$.
$f''(x) = 12x^2 - 8 = 12(x^2 - \frac{2}{3})$ hat die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{2/3} \approx \pm 0.82$; diese sind einfach, also Wendestellen von f. Die zugehörigen Wendepunkte sind $W_1 = (-\sqrt{2/3} \mid 7/9)$ und $W_2 = (\sqrt{2/3} \mid 7/9)$.

Skizze:

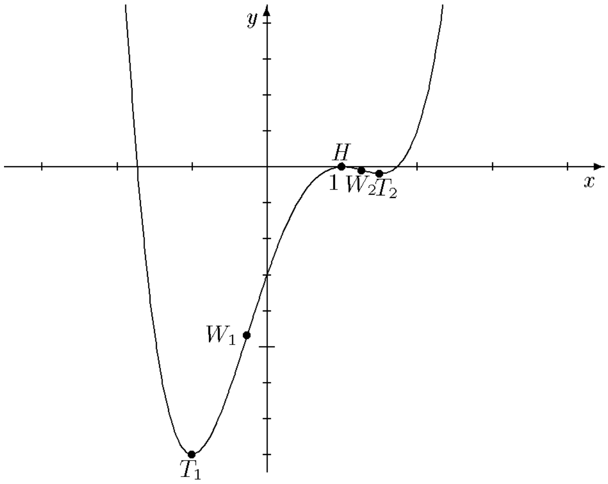


c) Es ist $f(-1) = 0$ und $f(x)\colon (x+1) = -(x^3-9x^2+27x-27)$. Dieser letzte Term hat $+3$ als Nullstelle und erneute Polynomdivision ergibt dann $f(x) = -(x+1)(x-3)(x^2-6x+9) = -(x+1)(x-3)(x-3)^2$. Damit hat f die Nullstellen -1 (einfach) und $+3$ (dreifach).
$f'(x) = -4x^3+24x^2-36x = -4x(x^2-6x+9) = -4x(x-3)^2$ hat die Nullstellen 0 (einfach) und $+3$ (doppelt). Damit ist 0 Extrem- und $+3$ Sattelstelle. Da der führende Koeffizient negativ ist, fällt die Funktion schließlich, d. h. der (einzige) Extrempunkt ist ein Hochpunkt: $H = (0 \mid f(0)) = (0 \mid 27)$. Der Sattelpunkt ist $S = (+3 \mid 0)$.
$f''(x) = -12(x^2 - 4x + 3) = -12(x-3)(x-1)$ hat die beiden (einfachen) Nullstellen $+1$ und $+3$. Damit hat f neben dem schon bestimmten Sattelpunkt S noch einen weiteren Wendepunkt $W = (1 \mid f(1)) = (1 \mid 16)$.
Skizze:



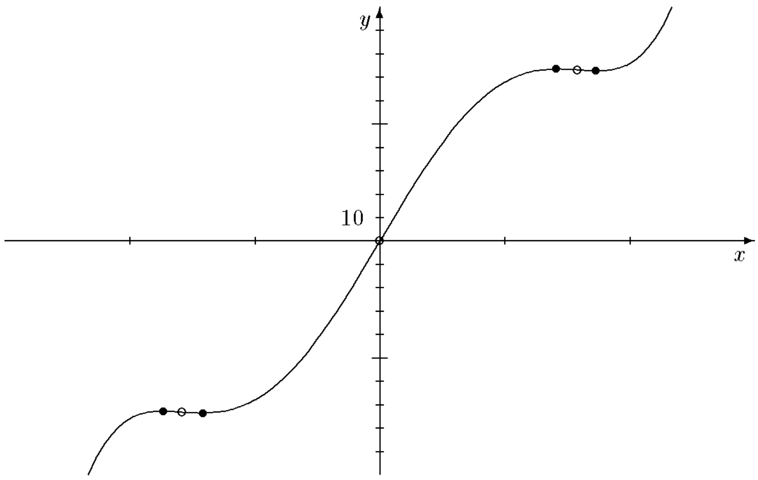
d) $+1$ ist Nullstelle von f. Polynomdivision ergibt $f(x) : (x-1) = x^3 - x^2 - 3x + 3$. Wieder ist $+1$ Nullstelle, erneute Polynomdivision ergibt $f(x) = (x-1)^2(x^2-3)$. Damit hat f die Nullstellen $+1$ (doppelt) und $\pm\sqrt{3}$ (einfach).
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 4x + 6$ hat ebenfalls $+1$ als Nullstelle. Wir erhalten durch Polynomdivision $f'(x) = (x-1)(4x^2-2x-6)$ und daraus die drei (einfachen) Nullstellen ± 1 und $3/2$ von f'. Dies sind Extremstellen von f. Die zugehörigen Extrempunkte sind ein Tiefpunkt $T_2 = (3/2 \mid f(3/2)) = (3/2 \mid -3/16) = (1.5 \mid -0.1875)$, ein Hochpunkt $H = (1 \mid f(1)) = (1 \mid 0)$ und ein weiterer Tiefpunkt $T_1 = (-1 \mid f(-1)) = (-1 \mid -8)$.
$f''(x) = 12x^2 - 12x - 4$ hat die beiden (einfachen) Nullstellen $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{12}}$. Dies sind Wendestellen von f und die Wendepunkte sind $W_1 \approx (-0.26 \mid -4.68)$ sowie $W_2 \approx (1.26 \mid -0.10)$.

Skizze:



e) Diese Funktion ist punktsymmetrisch, da nur ungerade Potenzen im Funktionsterm $f(x)$ auftreten.
$f(x) = x(3x^4 - 25x^2 + 90)$ hat die einfache Nullstelle 0. Mittels Substitution und p, q-Formel zeigt man, daß $3x^4 - 25x^2 + 90$ keine Nullstellen hat.
Die Gleichung $f'(x) = 15(x^4 - 5x^2 + 6) = 0$ kann man mittels Substitution auf die quadratische Gleichung $z^2 - 5z + 6 = 0$ reduzieren. Letztere löst man mittels p, q-Formel oder dem Satz von Vieta. Man erhält $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$ und damit $f'(x) = 15(x^4 - 5x^2 + 6) = 15(x^2 - 2)(x^2 - 3)$. Also hat f' die vier (einfachen) Nullstellen $\pm\sqrt{2}$ und $\pm\sqrt{3}$. Diese sind sämtlich Extremstellen. Man erhält die Extrempunkte $H_1 = (-\sqrt{3} \mid -42\sqrt{3}) \approx (-1.73 \mid -72.75)$, $T_1 = (-\sqrt{2} \mid -52\sqrt{2}) \approx (-1.41 \mid -73.54)$ sowie die dazu symmetrische Punkte $H_2 = (\sqrt{2} \mid 52\sqrt{2}) \approx (1.41 \mid 73.54)$ und $T_2 = (\sqrt{3} \mid 42\sqrt{3}) \approx (1.73 \mid 72.75)$.
$f''(x) = 60x^3 - 150x = 60x(x^2 - \frac{5}{2})$ hat die (einfachen) Nullstellen 0 und $\pm\sqrt{5/2} \approx 1.58$. Diese sind somit Wendestellen und die Wendepunkte sind $W_1 \approx (-1.58 \mid -73.13)$, $W_2 = (0 \mid 0)$ und schließlich $W_3 \approx (1.58 \mid 73.13)$.
In der nachfolgenden Skizze sind die Wendepunkte durch kleine Kreise, die Extrempunkte durch 'massive' Punkte gekennzeichnet. Die Skala ist in x-Richtung stark gestreckt, damit die entscheidenden Punkte gut getrennt erkennbar sind. (In Wahrheit ist der Graph wesentlich steiler. Bei 0 ist der Anstieg 90 (!)).

Skizze:



3) a) Schnittpunkte zweier Graphen f_k und f_l $(k \neq l)$ sind gegeben durch Lösungen der Gleichung

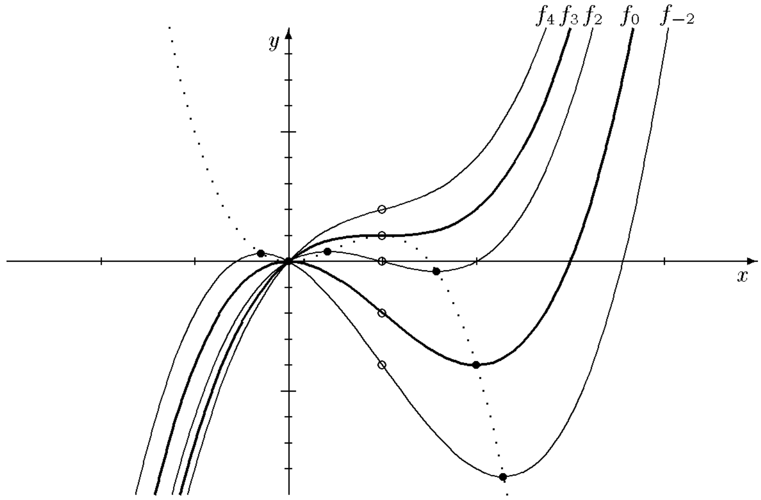
$$f_k(x) = f_l(x) \iff x^3 - 3x^2 + kx = x^3 - 3x^2 + lx \iff kx = lx \iff (k-l)x = 0\,.$$

Für $k \neq l$, also $k - l \neq 0$, hat diese letzte Gleichung nur die Lösung $x = 0$ (unabhängig von k und l). Damit ist $(0 \mid f_k(0)) = (0 \mid 0)$ der gesuchte gemeinsame Punkt aller Graphen f_k.
b) Es ist $f_k'(x) = 3x^2 - 6x + k$ und $f_k''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$. Damit hat f_k'' (unabhängig von k)

bei 1 seine einzige Nullstelle, und diese ist einfach. 1 ist also Wendestelle aller f_k.
Der zugehörige Wendepunkt ist $W_k = (1 \mid f_k(1)) = (1 \mid k-2)$.

c) Gemäß p,q-Formel gilt $f_k'(x) = 3(x^2 - 2x + \frac{k}{3}) = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1-\frac{k}{3}}$, wobei das Vorzeichen des Radikanden $1 - k/3$ entscheidet, ob und wieviele Lösungen es gibt. Wir unterscheiden 3 Fälle:
<u>$k > 3$</u>: Dann ist $1 - k/3 < 0$, also hat f_k' keine Nullstellen, f_k somit keine Extremstellen.
<u>$k = 3$</u>: Dann ist $1 - k/3 = 0$ und f_k' hat die einzige (doppelte) Nullstelle 1; diese ist dann eine Wendestelle von f_k (siehe auch a)).

<u>$k < 3$</u>: Dann ist $1 - k/3 > 0$ und f_k' hat die beiden (einfachen) Nullstellen $1 \pm \sqrt{1-\frac{k}{3}}$. Da der führende Koeffizient von f_k' positiv ist, steigt f_k schließlich an, so daß an der letzten Extremstelle $(1 + \sqrt{1-k/3})$ ein Minimum und an der anderen $(1 - \sqrt{1-k/3})$ ein Maximum vorliegt.
In nachstehender Skizze sind einige Graphen skizziert (für $k = 4, 3, 2, 0, -2$). Die Wendepunkte an der Stelle 1 sind durch kleine Kreise, die Extrempunkte durch Punkte gekennzeichnet. Die benutzte Strichstärke wechselt von einem Graphen zum benachbarten. In dieser Skizze ist zusätzlich die Kurve eingezeichnet, die von den Extrempunkten (und dem Sattelpunkt) gebildet wird.



4) a) f_k ist punktsymmetrisch.
$f_k(x) = x(x^2 + k)$ hat 0 als Nullstelle; diese ist einfach, wenn $k \neq 0$, und dreifach, wenn $k = 0$ ist.
Für $k > 0$ existieren keine weiteren Nullstellen; für $k < 0$ gibt es zwei weitere (einfache) Nullstellen $\pm\sqrt{-k}$. Zusammenfassend:

$$\text{Nullstellen von } f_k\text{:} \quad \begin{cases} 0, \pm\sqrt{-k} & \text{einfach} \quad \text{für } k < 0, \\ \quad 0 & \text{dreifach} \quad \text{für } k = 0, \\ \quad 0 & \text{einfach} \quad \text{für } k > 0. \end{cases}$$

$f_k'(x) = 3x^2 + k = 0 \iff x^2 = -k/3$. Wieder unterscheiden wir die drei Fälle und erhalten:

$$\text{Nullstellen von } f_k'\text{:} \quad \begin{cases} \pm\sqrt{-k/3} & \text{einfach} \quad \text{für } k < 0, \\ \quad 0 & \text{doppelt} \quad \text{für } k = 0, \\ \text{keine} & \qquad\qquad \text{für } k > 0. \end{cases}$$

Für $k = 0$ liegt bei 0 eine Sattelstelle vor; der Sattelpunkt von f_0 ist $S = (0 \mid 0)$.
Nur für $k < 0$ hat f_k Extremstellen. Die Extremwerte sind

$$f_k\Big(\sqrt{\tfrac{-k}{3}}\Big) = \Big(\sqrt{\tfrac{-k}{3}}\Big)^3 + k\Big(\sqrt{\tfrac{-k}{3}}\Big) = \tfrac{-k}{3}\sqrt{\tfrac{-k}{3}} + k\sqrt{\tfrac{-k}{3}} = \tfrac{2}{3}k\sqrt{-\tfrac{k}{3}}$$

und wegen der Punktsymmetrie von f_k

$$f_k\Big(-\sqrt{-\tfrac{k}{3}}\Big) = -\tfrac{2}{3}k\sqrt{-\tfrac{k}{3}}\,.$$

Da der führende Koeffizient von f_k positiv ist, steigt f_k schließlich an, so daß an der 'letzten' Extremstelle $\sqrt{-k/3}$ ein Minimum und an der anderen ein Maximum vorliegt. Damit erhalten wir die

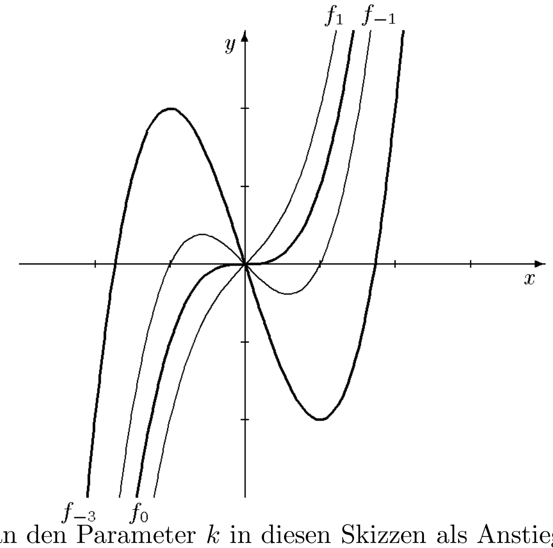
Extrempunkte von f_k:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Tiefpunkt} & T_k = \left(\sqrt{-\frac{k}{3}} \mid \frac{2}{3}k\sqrt{-\frac{k}{3}}\right), \\ \text{Hochpunkt} & H_k = \left(-\sqrt{-\frac{k}{3}} \mid -\frac{2}{3}k\sqrt{-\frac{k}{3}}\right). \end{array}\right\} \text{ für } k < 0\,.$$

Da $f_k''(x) = 6x$ von k unabhängig ist, ist das Krümmungsverhalten aller f_k einheitlich; 0 ist einzige Wendestelle, $W = (0 \mid 0)$ ist gemeinsamer Wendepunkt aller Funktionsgraphen:

$$\text{Wendepunkt:} \quad W = (0 \mid 0) \quad \text{für alle } k\,.$$

Skizzen:



Wegen $f_k'(0) = k$ findet man den Parameter k in diesen Skizzen als Anstieg der Kurven im Koordinatenursprung wieder.

b) Wenn bei 1 ein Extremum vorliegen soll, muß $f_k'(1) = 0$ sein:

$$0 = f_k'(1) = 3 + k \iff k = -3\,.$$

Höchstens f_{-3} kann bei $+1$ ein Extremum haben. Daß tatsächlich ein Extremum vorliegt, folgt aus den Überlegungen von a); es ist ein Minimum.

c) Für alle k ist 0 Wendestelle von f_k.

d) Wie bei b) stellen wir fest $f_k'(-2) = 0 \iff 3 \cdot (-2)^2 + k = 0 \iff k = -12$. Damit kann nur für f_{-12} bei -2 ein Minimum vorliegen. Aber: Es liegt dort zwar ein Extremum vor, *aber kein Minimum*, sondern ein Maximum (siehe a) bzw. $f_{-12}''(-2) = 6 \cdot (-2) < 0$). Folglich gibt es keinen Wert von k mit den in c) geforderten Eigenschaften.

5) Allgemeiner Ansatz: Da die Funktion ganzrational sein und der Grad höchstens 3 betragen soll, kann $f(x)$ in der Form

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

angesetzt werden. Gesucht sind nun die 4 Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Bedingungen: Wir setzen die gestellten Forderungen für f in Bedingungen (meist Gleichungen) für die gesuchten Koeffizienten a, b, c, d um.

1. $O = (0 \mid 0)$ Punkt des Graphen, d. h. $0 = f(0) = d$. Damit sind nur noch 3 unbekannte Größen zu bestimmen: a, b, c.

2. $W = (2 \mid 4)$ soll Wendepunkt sein. Dies sind 2 Bedingungen! Erstens muß W auf dem Graphen liegen ($f(2) = 4$) und zweitens 2 Wendestelle sein. Für Letzteres ist $f''(2) = 0$ notwendig (aber nicht hinreichend!).

3. Die Tangente an den Graphen im Punkt W hat den Anstieg -3: $f'(2) = -3$.

Mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$ erhalten wir für die drei Unbekannten a, b, c die drei folgenden Bedingungen:

$$\begin{array}{llcrcl} (1) & f(2) & = & 4 & \iff & 8\,a + 4\,b + 2\,c = 4 \\ (2) & f'(2) & = & -3 & \iff & 12\,a + 4\,b + c = -3 \\ (3) & f''(2) & = & 0 & \iff & 12\,a + 2\,b = 0 \end{array}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem, das man mit den üblichen Methoden löst (Einsetzungs- oder Additionsverfahren). (3) $\iff b = -6a$. In (1) und (2) eingesetzt ergibt sich
(1) $8a + 4(-6a) + 2c = 4 \iff 2c = 4 + 16a \iff c = 2 + 8a$, und damit dann
(2) $12a + 4(-6a) + (2 + 8a) = -3 \iff -4a = -5 \iff a = 5/4$.
Setzt man nun den gefundenen Wert für a in die Formeln für b und c ein, so erhält man $b = -15/2$ und $c = 12$. Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung: $a = 5/4$, $b = -15/2$, $c = 12$.
Dies besagt, daß die einzig mögliche Funktion mit den geforderten Eigenschaften gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x\,.$$

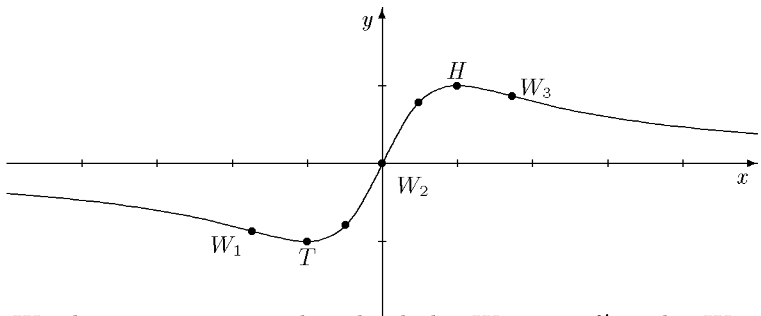
Da wir die Wendestellenbedingung abgeschwächt hatten zu der notwendigen Bedingung $f''(2) = 0$, müssen wir nun noch überprüfen, ob bei $+2$ tatsächlich eine Wendestelle vorliegt, d. h. f'' an der Nullstelle 2 *das Vorzeichen wechselt.* Da $f''(x)$ linear ist, ist dies sicher erfüllt:
Die angegebene Funktion ist die einzige Funktion mit den geforderten Eigenschaften.

Übungsaufgaben zur Klausurvorbereitung

Lehrbuch Analysis 2, S. 155, Nr. 1.
Die Funktion f hat keine Lücken, einzige Nullstelle bei 0 (mit VZW). Sie ist symmetrisch zum Koordinatenursprung ($f(-x) = -f(x)$). Da der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad, besitzt der Graph von f die x-Achse als Asymptote.
Die ersten beiden Ableitungen sind

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\,,\ f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\,.$$

Daraus entnimmt man die Extremstellen ± 1 und die Wendestellen $0, \pm\sqrt{3}$.
Welcher Art die Extremstellen sind, kann man in diesem Falle durch Einsetzen der Extremstellen ± 1 in f'' ermitteln. Es ist $f''(-1) > 0$ und $f''(1) < 0$, also liegt bei -1 ein Minimum und bei $+1$ ein Maximum vor.
Wir erhalten also einen Tiefpunkt $T = (-1|f(-1)) = (-1|-1)$, einen Hochpunkt $H = (1|f(1)) = (1|1)$ sowie drei Wendepunkte $W_1 = (-\sqrt{3}|f(-\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}|-\frac{1}{2}\sqrt{3})$, $W_2 = (0|0)$ und $W_3 = (\sqrt{3}|\frac{1}{2}\sqrt{3})$.
Skizze des Graphen von f:



b) Die Steigung der Wendetangenten ist gegeben durch den Wert von f' an den Wendestellen, also durch

$$f'(-\sqrt{3}) = f'(\sqrt{3}) = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4} \text{ und } f'(0) = 2\,.$$

c) Man muß die Gleichung $f'(x) = 1$ lösen:

$$\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 1 \iff 2 - 2x^2 = (x^2+1)^2$$
$$\iff 2 - 2x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 \iff x^4 + 4x^2 - 1 = 0\,.$$

Diese Gleichung vierten Grades kann man durch Substitution lösen. Wir setzen $z = x^2$ und lösen zunächst

$$z^2 + 4z - 1 = 0 \iff z = -2 \pm \sqrt{4+1} = -2 \pm \sqrt{5}\,.$$

Die Gleichung $x^2 = z$ ist für $z = -2 - \sqrt{5} < 0$ unlösbar und besitzt für $z = -2 + \sqrt{5} > 0$ die beiden Lösungen

$$x = \pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}\,.$$

Genau an diesen beiden Stellen hat die Tangente an den Graphen von f die Steigung 1. Auch diese Punkte sind in der obigen Skizze gekennzeichnet.
Lehrbuch Analysis 2, S. 155, Nr. 2.a), d)
f_1 hat keine Lücken, f_2 hat zwei Lücken, und zwar bei ± 2 Pole mit VZW. Beide Funktionen haben eine einzige Nullstelle (dreifach, mit VZW) bei 0. Außerdem besitzen beide Funktionen eine Asymptote (der Zählergrad ist um 1 größer als der Nennergrad). Diese bestimmt man durch Polynomdivision und erhält in beiden Fällen als Gleichung der Asymptoten $y = x$; die Winkelhalbierende im I. und III. Quadranten ist Asymptote.

Wir berechnen die Ableitungen

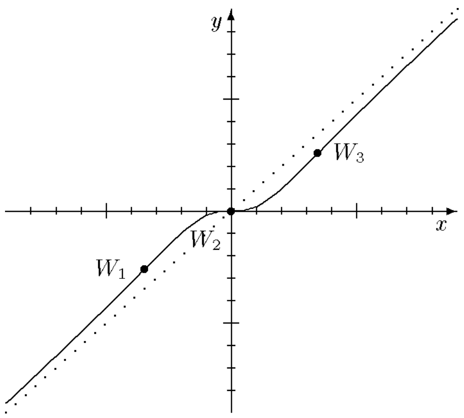
$$f_1'(x) = \frac{x^2(x^2+12)}{(x^2+4)^2}\,, \qquad f_2'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}\,,$$
$$f_1''(x) = \frac{8x(12-x^2)}{(x^2+4)^3}\,, \qquad f_2''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^2}\,.$$

Wir entehmen daraus:

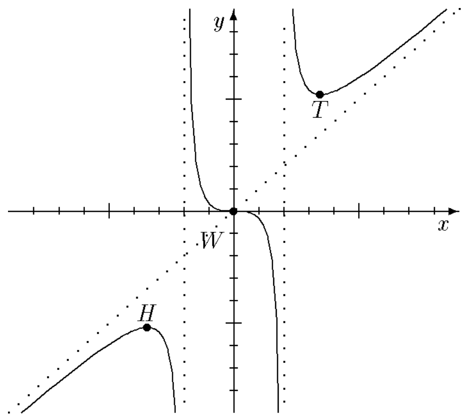
f_1: f_1' hat eine einzige Nullstelle (bei 0), diese ist jedoch doppelt, ohne VZW, also hat f_1 keine Extremstelle.
f_1'' hat drei Nullstellen, und zwar bei 0 und bei $\pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$, alle einfach, mit VZW. Also hat f_1 an diesen Stellen Wendestellen.
Die zugehörigen Wendepunkte sind $W_1 = (-2\sqrt{3}|-\frac{3}{2}\sqrt{3})$, $W_2 = (0|0)$ und $W_3 = (2\sqrt{3}|\frac{3}{2}\sqrt{3})$.

f_2: f_2' hat Nullstellen bei 0 (doppelt, ohne VZW) und bei $\pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ (einfach, mit VZW). Also hat f_2 zwei Extremstellen bei $\pm 2\sqrt{3}$. Durch Einsetzen dieser Werte in f_2'' stellt man fest, daß bei $-2\sqrt{3}$ ein Maximum und bei $+2\sqrt{3}$ ein Minimum von f_2 vorliegt. Wir erhalten einen Hochpunkt $H = (-2\sqrt{3}|-3\sqrt{3})$ und einen Tiefpunkt $T = (2\sqrt{3}|3\sqrt{3})$.
f_2'' hat eine einzige Nullstelle, und zwar bei 0 (einfach, mit VZW); f_2 hat also nur bei 0 eine Wendestelle. Der Wendepunkt ist $W = (0|0)$.

Damit ergeben sich die nachfolgenden Skizzen sowie die Behauptung von Teil d).



Graph von f_1



Graph von f_2

Lehrbuch Analysis 2, S. 155, Nr. 3. a), b)

Es ist
$$f(x) = 2x(1 - \frac{1}{2x+1}) = \frac{4x^2}{2x+1}\,.$$
Einzige Lücke ist $-\frac{1}{2}$. Diese ist nicht Nullstelle des Zählers, also ein Pol von f, und zwar mit VZW. Die einzige Nullstelle von f ist 0, und zwar doppelt, ohne VZW. Es existiert eine Asymptote (der Zählergrad ist um 1 größer als der Nennergrad). Diese kann man durch Polynomdivision bestimmen, oder in diesem Fall folgendermaßen umformen:
$$f(x) = 2x(1 - \frac{1}{2x+1}) = 2x - \frac{2x}{2x+1} = 2x - \frac{2x+1-1}{2x+1} = 2x - 1 + \frac{1}{2x+1}\,.$$
Wir erkennen als Asymptotengleichung $y = 2x - 1$.

Die ersten beiden Ableitungen von f sind (mit Hilfe der letzten Form von $f(x)$ unter Verwendung der Kettenregel berechnet):
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{1}{(2x+1)^2} \cdot 2 = 2 - \frac{2}{(2x+1)^2}\,, \\ f''(x) &= \frac{4}{(2x+1)^3} \cdot 2 = \frac{8}{(2x+1)^3}\,. \end{aligned}$$
Offenbar hat f'' keine Nullstellen, f also keine Wendestellen. Zur Berechnung der Nullstellen von f' schreiben wir $f'(x)$ als Bruchterm:
$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x+1)^2} = \frac{2(4x^2+4x+1)-2}{(2x+1)^2} = \frac{8x^2+8x}{(2x+1)^2} = \frac{8x(x+1)}{(2x+1)^2}\,.$$
Daraus lesen wir ab: f' hat zwei Nullstellen: 0 und -1, beide einfach, mit VZW. Damit hat f bei -1 und 0 Extremstellen, und zwar (setze -1 bzw. 0 in f'' ein) liegt bei -1 ein Maximum und bei 0 ein Minimum vor. Wir erhalten so einen Hochpunkt $H = (-1|-4)$ und einen Tiefpunkt $T = (0|0)$.

Skizze: