

**Arbeitsauftrag**

1) Gegeben sind die Zahlen

$$a = 1200, b = 108\,900, c = 216\,000, d = 326\,700 \text{ und } e = 33 \cdot 275 \cdot 144.$$

- a) Bestimmen Sie von allen Zahlen die Primfaktorzerlegung.
- b) Untersuchen Sie die Zahlen auf gegenseitige Teilbarkeit.
- c) Bestimmen Sie für alle Zahlenpaare den ggT und das kgV.
- d) Welche dieser Zahlen sind Quadratzahlen (zweite Potenzen) oder Kubikzahlen (dritte Potenzen)? Welches ist ggf. die Basis?

## Arbeitsauftrag — Lösungen

1) a) Primzerlegungen:

$$a = 12 \cdot 100 = 3 \cdot 4 \cdot 10^2 = 3 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2,$$

$$b = 1089 \cdot 100 = 9 \cdot 121 \cdot 10^2 = 3^2 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2,$$

$$c = 216 \cdot 1000 = 2 \cdot 108 \cdot 10^3 = 2 \cdot 2 \cdot 54 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^2 \cdot 2 \cdot 27 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3,$$

$$d = 3267 \cdot 100 = 9 \cdot 363 \cdot 10^2 = 3^2 \cdot 3 \cdot 121 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2,$$

$$e = (3 \cdot 11) \cdot (5 \cdot 55) \cdot 12^2 = 3 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 4^2 \cdot 3^2 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2$$

b) Es gilt  $b \mid d \mid e$ , denn in der Primzerlegung von  $b$  sind alle auftretenden Exponenten kleiner-gleich den entsprechenden Exponenten in der Primzerlegung von  $d$ , und diese wiederum sind kleiner-gleich den entsprechenden Exponenten in der Primzerlegung von  $e$ .

Genauso gilt  $a \mid c$  und  $a \mid e$ , denn in der Primzerlegung von  $a$  sind alle Exponenten kleiner-gleich den entsprechenden Exponenten in der Primzerlegung von  $c$  bzw. von  $e$ .

Weitere Teilbarkeiten gibt es nicht:  $b \nmid a$ , da in der Primzerlegung von  $b$  der Exponent der 3 (er hat den Wert 2) größer ist als der Exponent der 3 in der Primzerlegung von  $a$  (dieser hat den Wert 1).

$b \nmid c$ , da in der Primzerlegung von  $b$  der Exponent der 11 (er hat den Wert 2) größer ist als der Exponent der 11 in der Primzerlegung von  $c$  (er hat den Wert 0, da 11 in der Primzerlegung nicht vorkommt).

Genauso begründet man alle anderen Aussagen über Nicht-Teilbarkeit.

c) Aus  $b \mid d \mid e$  entnimmt man zunächst

$$\text{ggT}(b, d) = \text{ggT}(b, e) = b, \quad \text{ggT}(d, e) = d,$$

$$\text{kgV}(b, e) = \text{kgV}(d, e) = e, \quad \text{kgV}(b, d) = d.$$

Genauso folgt

$$\text{ggT}(a, c) = \text{ggT}(a, e) = a, \quad \text{kgV}(a, c) = c, \quad \text{kgV}(a, e) = e.$$

Für die anderen Zahlenpaare benutzen wir die Primzerlegungen, um ggT und kgV zu bestimmen. Den ggT erhält man, indem man bei allen Primfaktoren den jeweils *kleineren* Exponenten wählt. Dabei sind nicht vorhandene Primfaktoren als Potenz mit Exponent 0 zu lesen.

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300.$$

Beim kgV muss man den jeweils *größeren* Exponenten wählen:

$$\text{kgV}(a, b) = \text{kgV}(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2.$$

Auf diese Weise erhält man die Ergebnisse in den folgenden Tabellen:

**größter gemeinsamer Teiler**

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	$a$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$	$a$
$b$		$b$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	$b$	$b$
$c$			$c$	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$
$d$				$d$	$d$
$e$					$e$

**kleinstes gemeinsames Vielfaches**

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	$a$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3$	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2$	$e$
$b$		$b$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$	$d$	$e$
$c$			$c$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$
$d$				$d$	$e$
$e$					$e$

d)  $b$  ist eine Quadratzahl, da in der Primzerlegung alle Exponenten gerade sind;  
 $b = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11)^2 = 330^2$ .

$c$  ist eine Kubikzahl, da in der Primzerlegung alle Exponenten durch drei teilbar sind:  $c = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 60^3$ .

Bei den drei anderen Zahlen besitzen die Exponenten in der Primzerlegung keinen gemeinsamen Teiler außer 1; diese Zahlen sind also weder Quadrat- noch Kubikzahlen.