Übungen zur Selbstkontrolle II

1) Beschreiben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form:
   a) die Menge der geraden natürlichen Zahlen,
   b) die Menge der zweistelligen Vielfachen von sieben,
   c) die Menge T_{48} der Teiler von 48,
   d) entfallen
   e) die Menge der Potenzen von 3.
   Welche der Mengen sind endlich, welche unendlich?
2) Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch eine charakteristische Eigenschaft:
   a) $A = \{6, 12, 18, 24, \ldots\}$,
   b) $B = \{10, 100, 1000, 10000, \ldots\}$,
   c) $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$,
   d) $D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$,
   e) $E = \{4, 9, 25, 49, 121, 169, \ldots\}$,
   f) $F = \{1, 8, 27, 64, 125, \ldots\}$.
3) Wir bezeichnen für natürliche Zahlen d mit T_d die Menge aller Teiler von d.
   a) Bestimmen Sie die Mengen T_{18}, T_{24}, T_{36} und T_{72} in aufzählender Darstellung.
   b) Bestimmen Sie in aufzählender Darstellung die Menge M aller natürlichen Zahlen, die sowohl zu T_{18} als auch zu T_{24} gehören. Beschreiben Sie M durch eine charakteristische Eigenschaft.
   c) Welche Teilmengenbeziehungen $\ldots \subset \ldots$ gelten zwischen den 5 Mengen aus a) bzw. b)? Welche gelten nicht ($\ldots \not\subset \ldots$)?

Übungen zur Selbstkontrolle II — Lösungen

1) a) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$,
b) $\{14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$,
c) $T_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$,
d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$,
e) $\{3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots\} = \{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, \ldots\}$.
Die Mengen unter a) und e) sind unendlich, die anderen endlich.

2) a) A ist die Menge der Vielfachen von 6.
b) B ist die Menge der Potenzen von 10.
c) C ist die Menge der Teiler von 24.
d) D ist die Menge der Primzahlen.
e) E soll die Menge der Quadrate von Primzahlen darstellen, und
f) F die Menge aller Kuben (dritten Potenzen) von natürlichen Zahlen.

3) a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
T_{18} &= \{1, 18, 2, 9, 3, 6\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}\,,\\
T_{24} &= \{1, 24, 2, 12, 3, 8, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}\,,\\
T_{36} &= \{1, 36, 2, 18, 3, 12, 4, 9, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}\,,\\
T_{72} &= \{1, 72, 2, 36, 3, 24, 4, 18, 6, 12, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}\,.
\end{aligned}$$

b) Es ist $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Dies ist die Menge der Teiler von 6: $M = T_6$. Beachten Sie: Definitionsgemäß besteht M aus allen gemeinsamen Teilern von 18 und 24; der größte darunter ist die 6: $6 = \mathrm{ggT}(18, 24)$. Wir sehen, dass die Menge der *gemeinsamen* Teiler zweier Zahlen gerade die Teiler des ggT sind.

c) Da 18 ein Teiler von 36 ist, ist jeder Teiler von 18 auch ein Teiler von 36. Dies bedeutet, dass *jede* Zahl aus T_{18} auch zu T_{36} gehört: $T_{18} \subset T_{36}$. Genauso findet man $T_{36} \subset T_{72}$ und $T_{24} \subset T_{72}$.

Gemäß der Definition gilt $M \subset T_{18}$ und $M \subset T_{24}$, so dass M in allen anderen Mengen enthalten ist. Weitere Teilmengenbeziehungen gibt es nicht: $T_{18} \not\subset T_{24} \not\subset T_{36}$. Eine vollständige Übersicht enthält das folgende Diagramm:

	M	T_{18}	T_{24}	T_{36}	T_{72}
M	$=$	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\subset$
T_{18}	$\not\subset$	$=$	$\not\subset$	$\subset$	$\subset$
T_{24}	$\not\subset$	$\not\subset$	$=$	$\not\subset$	$\subset$
T_{36}	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$=$	$\subset$
T_{72}	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$=$