Übungen (3)

1) Schreiben Sie die folgenden Terme als Produkt, indem Sie 'ausklammern':
   a) $4x^2y - 6xy + 12xy^3 - 24x^2y^2 =$
   b) $3pq^2 + 6p^2q^3 - 6p^3q^2 - 3p^2q^2 =$
   c) $17a^2b + 7ab - 24a^2b - 14a^3b =$
   d) $4a^3b^2z - 2ab^3z^2 + 10a^2bz^2 =$
   e) $a(x-3) + b(x-3) =$
   f) $3(x-1)^2y - 9a(x-1)^3y + 6(x-1)^2y^3 =$
   g) $(u+v) - b(u+v) =$
   h) $a(x-y) + (x-y)^2 =.$
2) a) Formulieren Sie das Distributivgesetz.
   b) Folgern Sie daraus die Regel:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd\,.$$

   Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:
   c) $(2a+3b)(c+d) =$
   d) $(9x-5y)(7x-6y) =$
   e) $(x-4)(x-5) =$
   f) $(x+y)(x-y)(2x+y) =$
   g) $(2a-3b)(-2b-3a) =$
   h) $(4b^2-3b)(b-2b^2) =$
   i) $(9x-5y)(7y-6x) =$
   j) $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4) =$
   k) $(a+b)(a-b) =$
3) Lösen Sie Klammern auf und fassen Sie zusammen:
   a) $(x+y)^2 =$
   b) $(x+y)^3 =$
   c) $(x+y)^4 =$
   d) $(a+b+c)^2 =$
   e) $(a-b+c)^2 =$
   f) $(x-3)^2(x-4) =$
   g) $(3x+2y-z)^2 =$
4) Vereinfachen Sie:
   a) $(x-y)^2 + (x+y)^2 =$
   b) $(x+y)^2 - (x-y)^2 =$
   c) $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1-x) =$
   d) $(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5)(1+a) =$
   e) Was vermuten Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse bei c) und d) allgemein?

Übungen (3) — Lösungen

1) a) $4x^2y - 6xy + 12xy^3 - 24x^2y^2 = 2xy(2x - 3 + 6y^2 - 12xy)$.
b) $3pq^2 + 6p^2q^3 - 6p^3q^2 - 3p^2q^2 = 3pq^2(1 + 2pq - 2p^2 - p)$.
c) $17a^2b + 7ab - 24a^2b - 14a^3b = -7a^2b + 7ab - 14a^3b = 7ab(-a + 1 - 2a^2)$.
d) $4a^3b^2z - 2ab^3z^2 + 10a^2bz^2 = 2abz(2a^2b - b^2z + 5az)$.
e) $a(x - 3) + b(x - 3) = (a + b)(x - 3)$.
f) $3(x - 1)^2y - 9a(x - 1)^3y + 6(x - 1)^2y^3 = 3(x - 1)^2y\big(1 - 3a(x - 1) + 2y^2\big) = 3(x - 1)^2y(1 + 3a - 3ax + 2y^2)$.
g) $(u + v) - b(u + v) = (1 - b)(u + v)$.
h) $a(x - y) + (x - y)^2 = (a + (x - y))(x - y) = (a + x - y)(x - y)$.

2) a) Es gilt für alle Zahlen x, y, z: $x(y + z) = xy + xz$.
b) $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$.
c) $(2a + 3b)(c + d) = 2ac + 2ad + 3bc + 3bd$.
d) $(9x - 5y)(7x - 6y) = 63x^2 - 54xy - 35xy + 30y^2 = 63x^2 - 89xy + 30y^2$.
e) $(x - 4)(x - 5) = x^2 - 5x - 4x + 20 = x^2 - 9x + 20$.
f) $(x + y)(x - y)(2x + y) = (x^2 - y^2)(2x + y) = 2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3$.
g) $(2a - 3b)(-2b - 3a) = -4ab - 6a^2 + 6b^2 + 9ab = -6a^2 + 5ab + 6b^2$.
h) $(4b^2 - 3b)(b - 2b^2) = 4b^3 - 8b^4 - 3b^2 + 6b^3 = -8b^4 + 10b^3 - 3b^2$.
i) $(9x - 5y)(7y - 6x) = 63xy - 54x^2 - 35y^2 + 30xy = -54x^2 + 93xy - 35y^2$.
j) $(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4) = a^4 - 2a^3 + 4a^2 + 2a^3 - 4a^2 + 8a + 4a^2 - 8a + 16 = a^4 + 4a^2 + 16$.
k) $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

3) a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,
b) $(x + y)^3 = (x^2 + 2xy + y^2)(x + y) =$
$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$,
c) $(x + y)^4 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x + y) = \ldots =$
$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.
d) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$,
e) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$.
f) $(x - 3)^2(x - 4) = (x^2 - 6x + 9)(x - 4) = x^3 - 10x^2 + 33x - 36$.
g) $(3x + 2y - z)^2 = 9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz$.

4) a) $(x - y)^2 + (x + y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$.
b) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = 2xy + 2xy = 4xy$.
c) $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1-x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6 = 1 - x^6$.
d) $(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5)(1+a) = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a-a^2+a^3-a^4+a^5-a^6 = 1 - a^6$.
Wir bemerken, dass diese Formel ein Spezialfall von c) ist; setzt man nämlich in c) für x den Term $-a$ ein, so erhält man

$$(1 + (-a) + (-a)^2 + (-a)^3 + (-a)^4 + (-a)^5)(1 - (-a)) = (1 - (-a)^6)\,, \text{ also}$$
$$(1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5)(1 + a) = (1 - a^6)\,.$$

e) In Verallgemeinerung von c) gilt für alle natürlichen Exponenten n:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}\,. \qquad (*)$$

Eine Verallgemeinerung von d) erhält man, indem man wieder x durch $-a$ ersetzt.