Übungen (6)

Lösen Sie die nachfolgenden (Un)Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen:

1) $3(x-2) = 4x + 7$
2) $8z - (5 - z) = 4(2 - 3z)$
3) $9x = 13 + (6x - 13)$
4) $8(3z - 20) = 4(6z - 40)$
5) $(x-3)(x-5) > (x-2)(x-6)$
6) $5(3x-1) = 3(5x-2)$
7) $(x+6)(x+1) < (x+2)(x+4)$
8) $(2x-4)(x+5) > (x-3)(2x+5)$
9) $(4-3x)(4x-7) \leq (2x+5)(7-6x)$
10) $x(x-3) = x(2x+5)$

Übertragen Sie die nachfolgenden Fragen zunächst in (Un)Gleichungen für die gesuchte(n) Zahl(en). Formulieren Sie diesen *Ansatz* so dicht wie möglich am Text der Aufgabe. Beantworten Sie dann die gestellten Fragen.

11) Von welcher Zahl ist das 3-fache um 4 größer als das 5-fache?
12) Bei welchen 5 aufeinanderfolgenden Zahlen ist die Summe viermal so groß wie die Summe der beiden kleinsten dieser Zahlen?

Lösen Sie die folgenden (Un)Gleichungen mit Formvariablen (*Parametern*).

13) a) $3x + 4a = 5x + 8a$, b) $(x+a)(a-2) < (x-a)(a+2)$.
14) $(x-a)(a+2) + 4a = 2(x-a)$
15) $6(4x+a) = 8(3x+a)$
16) a) $ax = a$, b) $ax = 1$.
17) a) $ax < a$, b) $a^2x < a^2$, c) $ax < x$

Übungen (6) — Lösungen

1)
$$\begin{aligned} & 3x-6 = 4x+7 \quad \mid -3x-7 \\ \iff & -13 = x \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{-13\}$

2)
$$\begin{aligned} & 8z-(5-z) = 4(2-3z) \\ \iff & 9z-5 = 8-12z \quad \mid +12z+5 \\ \iff & 21z = 13 \quad \mid :21 \\ \iff & z = \tfrac{13}{21} \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{\tfrac{13}{21}\}$

3)
$$\begin{aligned} & 9x = 13+(6x-13) \\ \iff & 9x = 6x \quad \mid -6x \\ \iff & 3x = 0 \quad \mid :3 \\ \iff & x = 0 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{0\}$

4)
$$\begin{aligned} & 8(3z-20) = 4(6z-40) \\ \iff & 24z-160 = 24z-160 \quad \mid -24z+160 \\ \iff & 0 = 0 \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung wahr ist, ist (wegen der Äquivalenz) auch die erste immer wahr. Das bedeutet, alle Zahlen sind Lösungen: $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$.

5)
$$\begin{aligned} & (x-3)(x-5) > (x-2)(x-6) \\ \iff & x^2-3x-5x+15 > x^2-2x-6x+12 \quad \mid -x^2 \\ \iff & -8x+15 > -8x+12 \quad \mid +8x \\ \iff & 15 > 12 \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung wahr ist, ist auch die erste immer wahr, also $L = \mathbb{Q}$.

6)
$$\begin{aligned} & 5(3x-1) = 3(5x-2) \\ \iff & 15x-5 = 15x-6 \quad \mid -15x \\ \iff & -5 = -6 \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung falsch ist, ist (wegen der Äquivalenz) auch die erste immer falsch. Das bedeutet, sie hat keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$.

7)
$$\begin{aligned} & (x+6)(x+1) < (x+2)(x+4) \\ \iff & x^2+7x+6 < x^2+6x+8 \quad \mid -x^2-6x-6 \\ \iff & x < 2 \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\} =]-\infty; 2[$.

8)
$$\begin{aligned} & (2x-4)(x+5) > (x-3)(2x+5) \\ \iff & 2x^2+6x-20 > 2x^2-x-15 \quad \mid -2x^2+x+20 \\ \iff & 7x > 5 \quad \mid :7 (>0!) \\ \iff & x > \tfrac{5}{7} \end{aligned}$$

Also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \tfrac{5}{7}\} =]\tfrac{5}{7}; \infty[$.

9)
$$\begin{aligned} & (4-3x)(4x-7) \le (2x+5)(7-6x) \\ \iff & -12x^2+37x-28 \le -12x^2-16x+35 \quad \mid +12x^2+16x+28 \\ \iff & 53x \le 63 \quad \mid :53(>0!) \\ \iff & x \le \tfrac{63}{53} \end{aligned}$$

Also: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \le \frac{63}{53}\} = \left]-\infty; \frac{63}{53}\right]$.

10) Behandelt man diese Gleichung wie die anderen (ausmultiplizieren), so wird man auf eine sog. *quadratische* Gleichung geführt, die Sie zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht lösen können.
Der andere, im Unterricht vorgeschlagene Weg war: Man dividiere beide Seiten der Gleichung durch x. Dies ist aber *keine* Äquivalenzumformung, denn dafür müsste sichergestellt sein, dass x nicht 0 ist; andernfalls ist die Division durch x nicht möglich! Ein möglicher Ausweg war (Vorschlag Frau Häger): Man formt die Gleichung zunächst um in eine Gleichung mit rechter Seite 0 und stelle die linke Seite nach Möglichkeit als Produkt dar. Dies ist hier durch Ausklammern möglich:

$$x(x-3) = x(2x+5) \iff x^2-3x = 2x^2+5x \iff 0 = x^2+8x = x\cdot(x+8)$$

Jetzt benutze man die grundlegende Tatsache: Ein Produkt kann nur dann Null sein, wenn wenigstens einer der Faktoren 0 ist. Dies bedeutet hier:

$$x\cdot(x+8) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x+8 = 0\,.$$

Auf diese Weise ist die die *eine quadratische* Gleichung äquivalent in *zwei* einfache lineare Gleichungen umgeformt, die sich nun sehr einfach lösen lassen: 0 und -8 sind die Lösungen der beiden linearen Gleichungen und folglich $\mathbb{L} = \{0, -8\}$.
Zu diesem Thema werden wir demnächst noch mehr hören, da sich alle Lösungsmethoden für Gleichungen höheren Grades (d. h. mit höheren x-Potenzen) darauf stützen.

11) Die gesuchte Zahl nennen wir x. Die Forderungen der Aufgabenstellung lauten dann: $3x = 5x+4$. Wir lösen nun diese Gleichung:

$$\begin{aligned} & 3x = 5x+4 \quad \mid -5x \\ \iff & -2x = 4 \quad \mid :(-2) \\ \iff & x = -2 \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl ist -2.

12) Hier ist nach 5 Zahlen gefragt. Da diese aber aufeinanderfolgen sollen, genügt es die kleinste davon zu kennen; nennen wir sie x. Dann sind die anderen $x+1$, $x+2$, $x+3$ und $x+4$. Die gesuchte Zahl x muss also die folgende Gleichung erfüllen:

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4) = 4(x+(x+1))\,.$$

$$\begin{aligned} & x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4) = 4(x+(x+1)) \\ \iff & 5x+10 = 8x+4 \quad \mid -5x-4 \\ \iff & 6 = 3x \quad \mid :2 \\ \iff & 2 = x \end{aligned}$$

Die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen sind 2, 3, 4, 5 und 6.

Parameteraufgaben löst man zunächst genauso wie solche ohne Parameter. Man muss hier nun jedoch besonders genau darauf achten, ob die beabsichtigten Umformungen