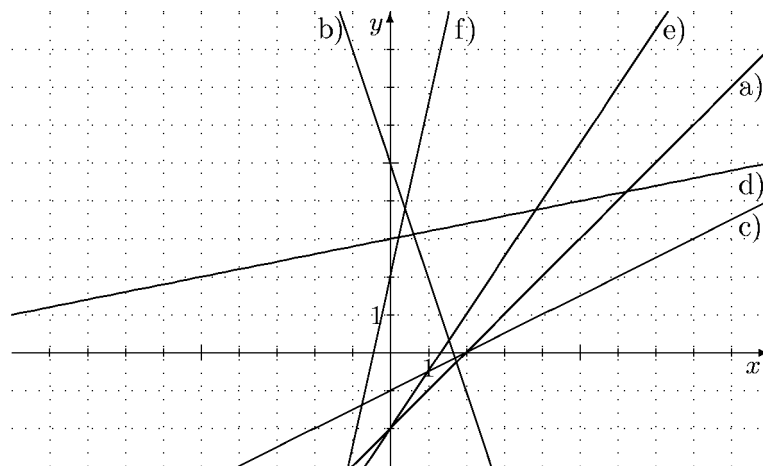
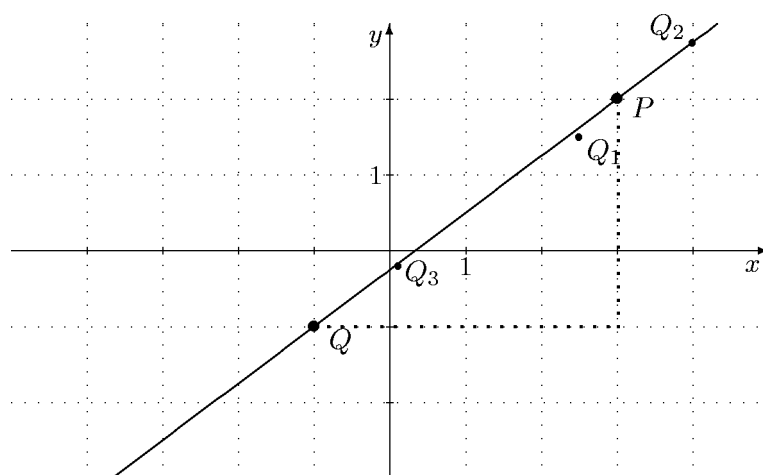


Übungen (8) — Lösungen

- 1) a) Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $y = ax + b$ mit rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ ist die Gerade mit dem Anstieg a und dem y -Achsenabschnitt b .
 b) Geraden mit dem Anstieg 0 sind Parallelen zur x -Achse.
 c)/d) Die Lösungsmenge der Gleichung $y = 3$ in der Koordinatenebene ist die Parallele zur x (!)-Achse, die bei 3 die y -Achse schneidet. Sie hat den Anstieg 0.
 Die Lösungsmenge der Gleichung $x = 5$ ist die Parallele zur y (!)-Achse, die bei 5 die x -Achse schneidet. Für sie ist der Anstieg nicht definiert.
- 2)



- 3) a) Die Lösungsmenge ist die Gerade mit dem Anstieg $\frac{2}{5}$ und dem y -Achsenabschnitt $-\frac{2}{15}$.
 b) Die Lösungsmenge ist die Gerade mit dem Anstieg $\frac{39}{2}$ und dem y -Achsenabschnitt -9 .
 c) Die Lösungsmenge ist die Parallele zur x -Achse mit dem y -Achsenabschnitt $\frac{2}{3}$.
 d) Die Lösungsmenge ist die gesamte Koordinatenebene $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (da die gegebene Gleichung äquivalent ist zur Gleichung ' $0 = 0$ ').
- 4) a) Die Skizze hat etwa folgende Gestalt.



Bei Zeichnung auf Millimeterpapier (bzw. bei Auswahl des 'richtigen' Steigungsdreiecks, siehe Skizze) kann man daraus den Anstieg $a = \frac{3}{4}$ entnehmen. Als y -Achsenabschnitt liest man etwa $-0,25$ ab. Eine (hinreichend genaue) Zeichnung

zeigt: Nur Q_2 liegt auf der Geraden. Völlige Sicherheit bietet die Zeichnung aber nicht. Dazu braucht man eine Gleichung für die Gerade.

c) Der Geradenanstieg ist $a = \frac{2-(-1)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$. Damit ist die Gerade Lösungsmenge der Gleichung $y = ax + b = \frac{3}{4}x + b$ und es muss noch b bestimmt werden. Da der Punkt $P = (3 | 2)$ auf der Geraden liegt, erfüllen seine Koordinaten diese Gleichung: $2 = a \cdot 3 + b = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$, also $b = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$. (Man kann statt P auch den Punkt Q benutzen, um b zu berechnen. Führt man beide Rechnungen durch, so hat man eine gute Probe!)

Insgesamt erhalten wir als Gleichung für die Gerade: $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. Eine andere (äquivalente) Gleichung wäre etwa $3x - 4y = 1$.

d) Damit läßt sich nun leicht (und exakt) entscheiden, dass Q_2 auf der Geraden liegt (seine Koordinaten erfüllen die Gleichung: $\frac{11}{4} = \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{1}{4}$), während Q_1 und Q_3 nicht darauf liegen ($\frac{3}{2} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{4}$).

e) Man bestimmt für P_1 und P_2 die fehlende y -Koordinate gerade so, dass die Geradengleichung erfüllt ist: Also $y_1 = \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ für P_1 und $y_2 = \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot (-3) - \frac{1}{4} = -\frac{5}{2}$ für P_2 .

Bei P_3 ist die y -Koordinate $y_3 = 1$ bekannt und die x -Koordinate x_3 gesucht. Da P_3 auf der Geraden liegen soll, muss x_3 so gewählt werden, dass die Geradengleichung erfüllt ist: $y_3 = 1 = \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}$. Diese Gleichung löst man wie üblich und erhält als (einzige) Lösung $x_3 = \frac{5}{3}$. Damit sind die Punkte $P_1 = (2, \frac{5}{4})$, $P_2 = (-3, -\frac{5}{2})$ und $P_3 = (\frac{5}{3} | 1)$.

5) a) Anstieg $a = \frac{1-3}{1-2} = 2$, y -Achsenabschnitt $b = y_1 - ax_1 = 3 - 2 \cdot 2 = -1$.

b) $a = \frac{2-8}{-3-3} = 1$, $b = 8 - 3 = 5$. c) $a = \frac{3-4}{1-6} = \frac{1}{5}$, $b = 4 - \frac{1}{5} \cdot 6 = \frac{14}{5}$.

d) Der Anstieg a ist nicht definiert; die Gerade ist eine Parallele zur y -Achse. (Dies merkt man spätestens daran, dass in der Formel für a bei Einsetzen der gegebenen Punktkoordinaten im Nenner eine 0 auftaucht!)

6) a) Eine Funktion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ heißt linear, wenn sie durch einen Funktionsterm der Form $f(x) = ax + b$ beschrieben werden kann.

b) Der Graph einer Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = ax + b$ ist eine Gerade in der Koordinatenebene mit dem Anstieg a und dem y -Achsenabschnitt b .

c) Alle Geraden in der Koordinatenebene, die nicht parallel zur y -Achse sind, kommen als Graph einer linearen Funktion vor.

7) a) Wegen $f(-1) = 3$ gehört der Punkt $P = (-1, 3)$ zum Graphen von f , und wegen $f(3) = -3$ der Punkt $Q = (3, -3)$ ebenfalls. Da f eine lineare Funktion ist, ist ihr Graph eine Gerade. Man verbindet also die Punkte P und Q durch eine Gerade und erhält so den Graphen von f .

b) Da man zwei Punkte des Graphen kennt und dieser eine Gerade ist, kann man deren Anstieg und y -Achsenabschnitt berechnen:

$$a = \frac{3 - (-3)}{-1 - 3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad b = 3 - a(-1) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ein Term für die Funktion f ist also gegeben durch $f(x) = ax + b = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.