## Übungen (9)

1) a) Welche der nachfolgenden Aussageformen sind Relationen? Welche sind Funktionsgleichungen? Welche sind äquivalent zu Funktionsgleichungen? Welche besitzen einen Funktionsgraphen als Lösungsmenge? Bestimmen Sie ggf. einen Funktionsterm dazu.

| | |
|---|---|
| 1) $x^2 - y = 2$, | 2) $xyz = 1$, |
| 3) $x^2 = y^2$, | 4) $y = (x^3 - 1)(x + 1)$, |
| 5) $y(x - 2) = 5$, | 6) $x^2 \leq y$, |
| 7) $y(x - 2) = 0$. | |

   b) Untersuchen Sie dieselben Fragen für die *Umkehrrelationen,* bei denen $x$ und $y$ vertauscht sind.

2) a) Vervollständigen Sie: Eine Funktion ist ...
   b) Jeder Term $f(x)$ mit höchstens einer Variablen $x$ bestimmt eine Funktion $f$. Wie lautet die Funktionsvorschrift?
   c) Vervollständigen Sie: Der Graph einer Funktion $f$ ist die Menge

$$G(f) =$$

   Jeder Graph einer Funktion $f$ ist Lösungsmenge einer passenden Gleichung. Welcher?
   d) Stellt eine Kreislinie einen Funktionsgraphen dar?

3) Gegeben sind drei Punkte $A = (2, 3)$, $B = (-2, -1)$ und $C = (-3, 4)$.
   a) Zeigen Sie, dass diese ein Dreieck bilden, d. h. dass sie nicht zusammen auf einer Geraden liegen.
   b) Bestimmen Sie Gleichungen für die drei Dreiecksseiten.
   c) Sind die Dreiecksseiten Funktionsgraphen? Wenn ja, von welchen Funktionen?
   d) Ist das Dreieck rechtwinklig?

4) Der Graph der Funktion $f$ mit dem Funktionsterm $f(x) = 7x - 4$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = x + 1$ in genau einem Punkt.
   a) Woran kann man dies unmittelbar erkennen?
   b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt.

5) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $\begin{bmatrix} 4x - 2y & = & 4 \\ -x - y & = & 4 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2x - y & = & 5 \\ -4x + 2y & = & 2 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 4x - 7y & = & 3 \\ 4x + y & = & -3 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} -4x - 2y & = & -2 \\ 6x + 3y & = & 3 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 4x + 7y - 1 & = & 2x + y - 1 \\ 4x - y + 1 & = & 2x - y - 1 \end{bmatrix}$,

6) Was können Sie allgemein über die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems aussagen? Benutzen Sie geometrische Überlegungen.

## Übungen (9) — Lösungen

1) 2) stellt keine Relation (in dem von uns definierten Sinne) dar, da *drei* Variable darin vorkommen. Alle anderen (Un)Gleichungen stellen Relationen dar.
Nur die Gleichung 4) $y = (x^3 - 1)(x + 1)$ stellt eine Funktionsgleichung (im engen Sinne) dar. Äquivalent zu Funktionsgleichungen sind außerdem die Gleichungen 1) und 5):
1) $x^2 - y = 2 \iff y = x^2 - 2$.
5) $y(x - 2) = 5 \iff y = \frac{5}{x-2}$. (Die Division durch $x - 2$ ist eine Äquivalenzumformung, da aus $y(x - 2) = 5$ zwangsläufig folgt: $x - 2 \neq 0$.)
Diese drei Gleichungen 1), 4) und 5) haben als Lösungsmenge jeweils einen Funktionsgraphen; als Funktionsterme kann man wählen: 1) $f(x) = x^2 - 2$, 4) $f(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$ und 5) $f(x) = \frac{5}{x-2}$.
Die Gleichungen 3) und 7) sind nicht äquivalent zu Funktionsgleichungen, denn sie haben als Lösungsmenge keinen Funktionsgraphen. Begründung: Gleichung 3) $x^2 = y^2$ hat zwei Lösungen $(-1, 1)$ und $(-1, -1)$ mit derselben $x$-Koordinate, aber unterschiedlicher $y$-Koordinate. Dasselbe gilt für die beiden Lösungen $(2, 5)$ und $(2, 4)$ der Gleichung 7) $y(x - 2) = 0$.
Aus demselben Grund haben Ungleichungen (wie z. B. 6)) als Lösungsmenge keinen Funktionsgraphen.
b) Die Umkehrrelation erhält man durch Vertauschung von $x$ und $y$, also:

| | |
|---|---|
| 1′) $y^2 - x = 2$, | 3′) $y^2 = x^2$, |
| 4′) $x = (y^3 - 1)(y + 1)$, | 5′) $x(y - 2) = 5$, |
| 6′) $y^2 \leq x$, | 7′) $x(y - 2) = 0$. |

Von diesen ist keine eine Funktionsgleichung (im engen Sinne); äquivalent zu einer Funktionsgleichung ist lediglich
5′): $x(y - 2) = 5 \iff y - 2 = \dfrac{5}{x} \iff y = 2 + \dfrac{5}{x}$.
Die Lösungsmenge ist also der Funktionsgraph der Funktion $f$ gegeben durch den Funktionsterm $f(x) = 2 + \dfrac{5}{x}$.
Alle anderen Umkehrrelationen sind nicht äquivalent zu Funktionsgleichungen; man kann jeweils Lösungspaare angeben, die dieselbe $x$-, aber verschiedene $y$-Koordinaten besitzen: $(2, 2)$, $(2, -2)$ für 1′) und 3′), $(0, 1)$, $(0, -1)$ für 4′), $(4, 1)$, $(4, 2)$ für 6′) und $(0, 1)$, $(0, 5)$ für 7′).

2) a) Eine Funktion ist *eine Zuordnung, die jeder Zahl (aus einer Menge D) eine eindeutig bestimmte Zahl zuordnet.*
b) Ein Term $f(x)$ mit höchstens einer Variablen $x$ bestimmt eine Funktion $f$ durch folgende Zuordnungsvorschrift: Zu einer Zahl $r$ bestimmt man den Funktionswert, indem man die gegebene Zahl $r$ *in den Term einsetzt und den Term ausrechnet.* Das dabei berechnete Ergebnis ist dann der zugeordnete (Funktions-) *Wert* $f(r)$. Definitionsbereich von $f$ ist dabei die Menge all der Zahlen $r$, die sinnvoll in den Term $f(x)$ eingesetzt werden können, also genau der Definitionsbereich des Terms.
c) Der Graph einer Funktion $f$ ist die Menge

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y = f(x)\}.$$

Dies ist offenbar die Lösungsmenge der *Funktionsgleichung* $y = f(x)$.
d) Eine Kreislinie kann keinen Funktionsgraphen darstellen, weil Parallelen zur $y$-Achse die Kreislinie in der Regel in keinem oder in zwei Punkten schneiden. Funktionsgraphen dürfen von Parallelen zur $y$-Achse aber nur in einem Punkt geschnitten werden.

3) a) Wir bestimmen eine Gleichung für die Gerade $g$ durch $A$ und $B$, indem wir wie üblich den Anstieg $a$ und den $y$-Achsenabschnitt $b$ berechnen:

$$a = \frac{3-(-1)}{2-(-2)} = 1 \quad \text{und} \quad y = 1 \cdot x + b \implies 3 = 2 + b \iff b = 1\,.$$

Die Gerade durch $A, B$ hat als Gleichung $y = x+1$. Da der Punkt $C$ diese Gleichung nicht erfüllt, liegt er nicht auf der Geraden durch $A, B$.
b) Für die anderen Dreiecksseiten erhält man:

$$\begin{aligned} g(A,C): &\quad a = \frac{4-3}{-3-2} = -\frac{1}{5}\,,\ b = 3 - (-\frac{1}{5} \cdot 2) = \frac{17}{5}\,, \\ g(B,C): &\quad a = \frac{4-(-1)}{-3-(-2)} = -5\,,\ b = 4 - (-5 \cdot (-3)) = -11\,. \end{aligned}$$

Damit sind die gesuchten Gleichungen

$$g(A,B):\ y = x+1\,, \quad g(A,C):\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}\,, \quad g(B,C):\ y = -5x - 11\,.$$

c) Da keine der Dreiecksseiten parallel zur $y$-Achse verläuft, sind sie alle Funktionsgraphen. Funktionsterme dafür sind $f(x) = x+1$, $g(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$ und $h(x) = -5x - 11$.
d) Das Dreieck ist rechtwinklig, wenn zwei der drei Seiten senkrecht zueinander verlaufen, d. h. wenn zwei Seitenanstiege negative Kehrwerte voneinander sind. Die Anstiege der Seiten sind 1, $-\dfrac{1}{5}$ und $-5$; keiner davon ist das Negative des Kehrwertes eines anderen: Das Dreieck ist nicht rechtwinklig.

4) a) Der Graph von $f$ ist eine Gerade mit dem Anstieg 7 (und dem $y$-Achsenabschnitt $-4$), während die andere Gerade den Anstieg 1 hat. Da die Anstiege unterschiedlich sind, sind die Geraden nicht parallel, haben in der Ebene also einen Schnittpunkt.
b) Für den gesuchten Schnittpunkt $(x, y)$ gilt $y = f(x) = 7x-4$ und auch $y = x+1$. Also

$$7x - 4 = x + 1 \iff 6x = 5 \iff x = \frac{5}{6}\,.$$

Damit ist die $x$-Koordinate des Schnittpunktes bekannt und die $y$-Koordinate ergibt sich dann durch $y = x + 1 = \frac{5}{6} + 1 = \frac{11}{6}$. Der gesuchte Schnittpunkt ist also $S = (\frac{5}{6}, \frac{11}{6})$.

5) a) Wir lösen eine Gleichung nach $y$ auf, etwa die zweite $y = -x - 4$, und setzen dann in die erste ein:

$$4x - 2(-x-4) = 4 \iff 6x = -4 \iff x = -\frac{2}{3}\,.$$

Damit ergibt sich $y = -(-\frac{2}{3}) - 4 = -\frac{10}{3}$; der einzige Lösungspunkt ist $(-\frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$.

b) $4x + y = -3 \iff y = -4x - 3$, also

$$4x - 7(-4x - 3) = 3 \iff 32x = -18 \iff x = -\frac{9}{16}\,.$$

Dies ergibt $y = 4 \cdot \frac{9}{16} - 3 = -\frac{3}{4}$; der einzige Lösungspunkt ist $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{4})$.
c) Zunächst formt man beide Gleichungen in die Standardform $Ax + By = C$ um:

$$\begin{bmatrix} 4x + 7y - 1 & = & 2x + y - 1 \\ 4x - y + 1 & = & 2x - y - 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2x + 6y & = & 0 \\ 2x & = & -2 \end{bmatrix}$$

Hier macht es keinen Sinn, nach $y$ aufzulösen, da die zweite Gleichung $y$ gar nicht enthält. Vielmehr lösen wir die zweite Gleichung nach $x$ auf: $x = -1$, und setzen dies in die erste ein: $-2 + 6y = 0 \iff y = \frac{1}{3}$. Die einzige Lösung ist $(-1, \frac{1}{3})$.
d) Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung: $2x - y = 5 \iff y = 2x - 5$ in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt den Widerspruch $-4x + 2(2x - 5) = 2 \iff -10 = 2$.
e) Auflösen nach $y$ ergibt $y = -2x + 1$ und einsetzen dann

$$6x + 3(-2x + 1) = 3 \iff 3 = 3\,.$$

Dies bedeutet, dass $x$ beliebig gewählt werden kann, während $y = -2x + 1$ sein muss. Es gibt also unendlich viele Lösungspunkte; es sind dies genau die Punkte der Form $(x, -2x + 1)$.
Geometrisch lassen sich die letzten beiden Ergebnisse sehr gut verstehen: In beiden Fällen stellen die beiden Einzelgleichungen *parallele* Geraden dar (d) Anstieg 2, e) Anstieg $-2$). Während im Falle d) die beiden Geraden verschieden sind und daher keinen Punkt gemeinsam haben, sind sie im Falle e) identisch: Die Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems ist eine komplette Gerade, nämlich die mit der Gleichung $y = -2x + 1$.

6) *Ein lineares Gleichungssystem (mit 2 Variablen) hat keine, eine oder unendliche viele Lösungen.*
Zur Begründung betrachten wir die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen. Diese sind (in der Regel[1)]) Geraden und die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist damit der Durchschnitt zweier Geraden. Nun schneiden sich zwei Geraden in *einem* Punkt, es sei denn, sie sind parallel. In diesem Falle gäbe es *keinen* gemeinsamen Punkt oder die Geraden sind sogar identisch und *alle* Geradenpunkte sind Lösungen des Gleichungssystems.

[1)] Die Ausnahmen von dieser Regel sind lineare Gleichungen $ax+by = c$ mit $a = b = 0$. Diese stellen keine Gerade dar, sondern die leere Menge (bei $c \neq 0$) oder die ganze Koordinatenebene $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (bei $c = 0$). Also bleibt auch in diesen Randfällen die obige Aussage richtig. Sie gilt sogar für mehr als 2 Variable und lässt sich dann noch verfeinern (siehe Lineare Algebra, 5. Semester).