Dreiecksgeometrie mittels linearer Funktionen

Gegeben sind drei Punkte

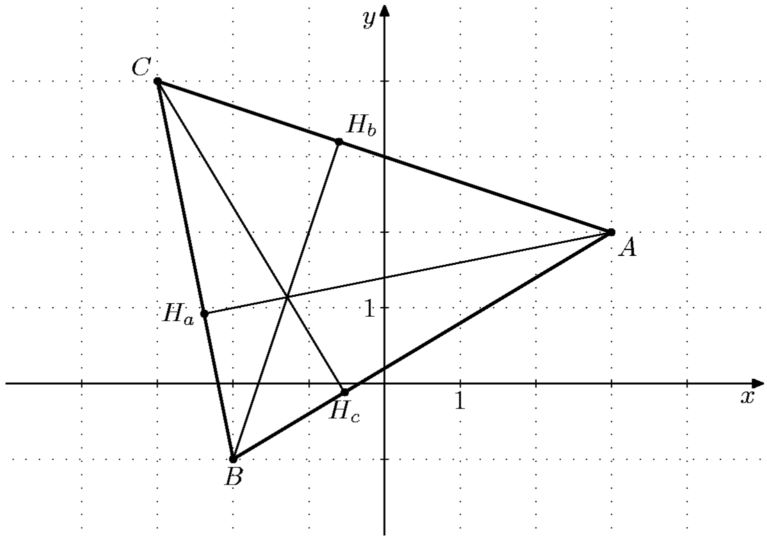
$$\boxed{A = (3,2)\,,\ B = (-2,-1)\,,\ C = (-3,4).}$$

Alle nachfolgenden Rechnungen lassen sich an einer sauberen Zeichnung überprüfen.

1) Zeigen Sie rechnerisch, dass die drei Punkte ein Dreieck bilden, d. h. dass sie nicht auf einer Geraden liegen.
2) Bestimmen Sie Gleichungen für alle Dreiecksseiten.
3) Bestimmen Sie Gleichungen für alle Höhen. (Eine Höhe in einem Dreieck ist eine Gerade durch einen Eckpunkt des Dreiecks, die senkrecht ist zur gegenüberliegenden Seite.)
4) Bestimmen Sie die Höhenfußpunkte, d. h. die Schnittpunkte der Höhen mit den gegenüberliegenden Seiten.
5) Zeigen Sie, dass sich alle Höhen des Dreiecks in einem einzigen Punkt schneiden, und bestimmen Sie ihn.
6) Bestimmen Sie Gleichungen für die drei Mittelsenkrechten dieses Dreiecks.
7) Zeigen Sie, dass sich alle Mittelsenkrechten des Dreiecks in einem einzigen Punkt schneiden, und bestimmen Sie ihn.

Dreiecksgeometrie — Lösungen

Zeichnung des Dreiecks mit den drei Höhen:



1) Wir bestimmen eine Gleichung für die Gerade durch zwei dieser Punkte, etwa A und B, und überprüfen dann, ob C auf dieser Geraden liegt.
Sei $c = g(A, B)$ die Gerade durch die beiden Punkte A, B. Ihr Anstieg ist

$$a = \frac{-1-2}{-2-3} = \frac{3}{5}\,.$$

Eine Gleichung der Geraden ist also $y = \frac{3}{5}x + b$ und wir bestimmen b durch Einsetzen von $A = (3, 2)$:

$$2 = \frac{3}{5} \cdot 3 + b \iff b = \frac{1}{5}\,.$$

Damit ist $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$ eine Gleichung für die Gerade $c = g(A, B)$.
Wir überprüfen, ob $C = (-3, 4)$ auf der Geraden c liegt, indem wir C in die Geradengleichung einsetzen:

$$\frac{3}{5} \cdot (-3) + \frac{1}{5} = -\frac{8}{5} \neq 4\,,\ C \notin c\,.$$

Damit bilden die drei Punkte ein Dreieck.

2) Seite a ist die Gerade durch $B = (-2, -1)$ und $C = (-3, 4)$. Wir berechnen zunächst den Anstieg:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4+1}{-3+2} = -5\,.$$

Eine Gleichung für a lautet also $y = -5x + b$. Durch Einsetzung von B in diese Gleichung berechnen wir den y-Achsenabschnitt b der Gerade a:

$$B \in g(B, C) \iff -1 = -5 \cdot (-2) + b \iff b = -11\,.$$

Die Geradengleichung für $g(B,C)$ lautet also: $y = -5x - 11$.
Seite b ist die Gerade durch $A = (3,2)$ und $C = (-3,4)$.

$$\text{Anstieg } a_b = \frac{4-2}{-3-3} = -\frac{1}{3}\,,$$

Eine Gleichung für b ist also $y = -\frac{1}{3}x + b$ und b bestimmen wir durch Einsetzen von $A = (3,2)$: $2 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + b \iff b = 3$. Die Gleichung für b lautet also $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

Seite c wird beschrieben durch die Gleichung $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$ (siehe Aufgabe 1).

3) Aus der vorangehenden Aufgabe kennen wir die Anstiege der Dreiecksseiten und damit auch die Anstiege der Höhen, denn diese sind das Negative der Kehrwerte der Anstiege der Dreiecksseiten.

$$\begin{aligned}
\text{Höhe } h_a: &\quad \text{Anstieg } -\frac{1}{a_a} = \frac{1}{5}\,,\\
\text{Höhe } h_b: &\quad \text{Anstieg } -\frac{1}{a_b} = 3\,,\\
\text{Höhe } h_c: &\quad \text{Anstieg } -\frac{1}{a_c} = -\frac{5}{3}\,.
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von Gleichungen für die Höhen, setzen wir den jeweiligen Eckpunkt in die Gleichung ein und bestimmen damit b:

$$\begin{array}{llll}
h_a: & y = \frac{1}{5}x + b_a\,, & A = (3,2) \in h_a & \Longrightarrow b_a = 2 - \frac{1}{5} \cdot 3 = \frac{7}{5}\,,\\
h_b: & y = 3x + b_b\,, & B = (-2,-1) \in h_b & \Longrightarrow b_b = -1 - 3 \cdot (-2) = 5\,,\\
h_c: & y = -\frac{5}{3}x + b_c\,, & C = (-3,4) \in h_c & \Longrightarrow b_c = 4 + \frac{5}{3} \cdot (-3) = -1\,.
\end{array}$$

Damit erhalten wir die folgenden Höhengleichungen:

$$\begin{aligned}
h_a: &\quad y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}\,,\\
h_b: &\quad y = 3x + 5\,,\\
h_c: &\quad y = -\frac{5}{3}x - 1\,.
\end{aligned}$$

4) Wir stellen Gleichungen für die Höhen und die gegenüberliegenden Seiten zusammen, die in den vorangehenden Aufgabe bestimmt wurden:

$$\begin{array}{llll}
h_a: & y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}\,, & a: & y = -5x - 11\,,\\
h_b: & y = 3x + 5\,, & b: & y = -\frac{1}{3}x + 3\,,\\
h_c: & y = -\frac{5}{3}x - 1\,, & c: & y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}\,.
\end{array}$$

Die Höhenfußpunkte sind die Schnittpunkte der jeweiligen Höhen mit den entsprechenden Seiten.
Höhenfußpunkt H_a:

$$\frac{1}{5}x + \frac{7}{5} = -5x - 11 \quad \Big| \cdot 5$$

$$\iff x + 7 = -25x - 55 \iff 26x = -62 \iff x = -\frac{31}{13}\,,$$

$$y = -5 \cdot (-\frac{31}{13}) - 11 = \frac{12}{13}\,.$$

Also

$$H_a = \Big(-\frac{31}{13}\,, \frac{12}{13}\Big) \approx (\,-2{,}38; 0{,}92)\,.$$

Die Näherungswerte ermöglichen einen Vergleich mit der Skizze.
Höhenfußpunkt H_b:

$$\begin{aligned} &3x + 5 = -\frac{1}{3}x + 3 \quad \Big| \cdot 3 \\ &\iff 9x + 15 = -x + 9 \iff 10x = -6 \iff x = -\frac{3}{5}\,, \\ &y = 3 \cdot (-\frac{3}{5}) + 5 = \frac{16}{5}\,. \end{aligned}$$

Also

$$H_b = \Big(-\frac{3}{5}\,, \frac{16}{5}\Big) \approx (\,-0{,}6; 3{,}2)\,.$$

Höhenfußpunkt H_c:

$$\begin{aligned} &-\frac{5}{3}x - 1 = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \quad \Big| \cdot 3 \cdot 5 \\ &\iff -25x - 15 = 9x + 3 \iff 34x = -18 \iff x = -\frac{9}{17}\,, \\ &y = \frac{3}{5} \cdot (-\frac{9}{17}) + \frac{1}{5} = -\frac{2}{17} \end{aligned}$$

Also

$$H_c = \Big(-\frac{9}{17}\,, -\frac{2}{17}\Big) \approx (\,-0{,}53;\, -0{,}12)\,.$$

5) Berechnung des Schnittpunktes H der Höhen h_a und h_b:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{5}x + \frac{7}{5} = 3x + 5 \quad \Big| \cdot 5 \\ &\iff x + 7 = 15x + 25 \iff 14x = -18 \iff x = -\frac{9}{7}\,, \\ &y = 3 \cdot (-\frac{9}{7}) + 5 = \frac{8}{7}\,. \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt von h_a und h_b ist also

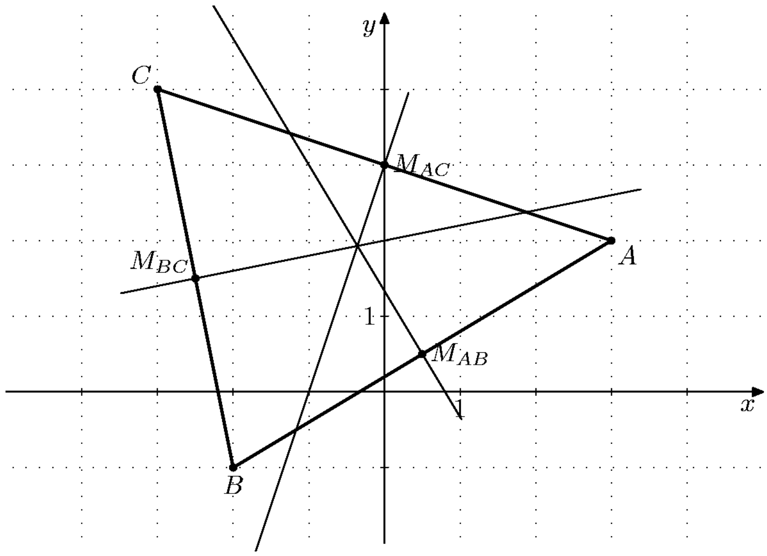
$$H = \Big(-\frac{9}{7}\,, \frac{8}{7}\Big) \approx (\,-1{,}29; 1{,}14)\,.$$

Wir verifizieren nun, dass dieser Schnittpunkt H auch auf der dritten Höhe h_c liegt. Deren Gleichung ist $y = -\frac{5}{3}x - 1$. Einsetzen von H ergibt

$$-\frac{5}{3} \cdot (-\frac{9}{7}) - 1 = \frac{15}{7} - 1 = \frac{8}{7}\,.$$

Die Gleichung für h_c ist erfüllt, H liegt auf h_c, alle drei Höhen schneiden sich in dem einem Punkt H.

Zeichnung des Dreiecks mit den drei Mittelsenkrechten:



6) Mittelsenkrechte sind Geraden durch die Seitenmittelpunkte senkrecht zu den Seiten. Wir berechnen also zuerst die Mittelpunkte durch Mittelung der Koordinaten der Eckpunkte (und vergleichen mit der Zeichnung):

$$A=(3,2)\,,\ B=(-2,-1) \implies M_{AB}=\Big(\frac{3+(-2)}{2}\,,\,\frac{2+(-1)}{2}\Big)=\Big(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\Big)\,,$$
$$A=(3,2)\,,\ C=(-3,4) \implies M_{AC}=\Big(\frac{3+(-3)}{2}\,,\,\frac{2+4}{2}\Big)=(0,3)\,,$$
$$B=(-2,-1)\,,\ C=(-3,4) \implies M_{BC}=\Big(\frac{-2+(-3)}{2}\,,\,\frac{-1+4}{2}\Big)=\Big(-\frac{5}{2}\,,\,\frac{3}{2}\Big)\,.$$

Die Mittelsenkrechten haben dieselben Anstiege wie die Höhen, ihre Anstiege sind also bereits berechnet. Zur Bestimmung von Gleichungen für die Mittelsenkrechten setzen wir den jeweiligen Mittelpunkt in die Gleichung ein und bestimmen damit den y-Achsenabschnitt:

$$\begin{array}{llll} m_a: & y=\frac{1}{5}x+b\,, & M_{BC}=(-\frac{5}{2}\,,\,\frac{3}{2})\in m_a & \implies b=\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\cdot(-\frac{5}{2})=2\,,\\ m_b: & y=3x+b\,, & M_{AC}=(0,3)\in m_b & \implies b=3\,,\\ m_c: & y=-\frac{5}{3}x+b\,, & M_{AB}=(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2})\in m_c & \implies b=\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{3}\,.\end{array}$$

Damit erhalten wir die folgenden Gleichungen für die Mittelsenkrechten:

$$m_a:\quad y=\frac{1}{5}x+2\,,$$
$$m_b:\quad y=3x+3\,,$$
$$m_c:\quad y=-\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}\,.$$

7) Berechnung des Schnittpunktes M der Mittelsenkrechten m_a und m_b:

$$\frac{1}{5}x+2=3x+3 \quad \Big|\cdot 5$$
$$\iff x+10=15x+15 \iff 14x=-5 \iff x=-\frac{5}{14}\,,$$
$$y=3\cdot\Big(-\frac{5}{14}\Big)+3=\frac{27}{14}\,.$$

Der Schnittpunkt von m_a und m_b ist also

$$M = \left(-\frac{5}{14}, \frac{27}{14} \right) \approx (-0{,}36; 1{,}93) .$$

Wir verifizieren nun, dass dieser Schnittpunkt M auch auf der dritten Mittelsenkrechten m_c liegt. Deren Gleichung ist $y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$. Einsetzen von M ergibt

$$-\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{5}{14}\right) + \frac{4}{3} = \frac{25+56}{42} = \frac{81}{42} = \frac{27}{14} .$$

Die Gleichung für m_c ist erfüllt, M liegt auf m_c, alle drei Mittelsenkrechten schneiden sich in dem einen Punkt M.

Die folgende Skizze veranschaulicht die geometrische Bedeutung des eben berechneten Schnittpunktes der drei Mittelsenkrechten: Dieser Punkt hat von allen drei Eckpunkten des Dreiecks denselben Abstand, er ist der Mittelpunkt des sog. *Umkreises.*