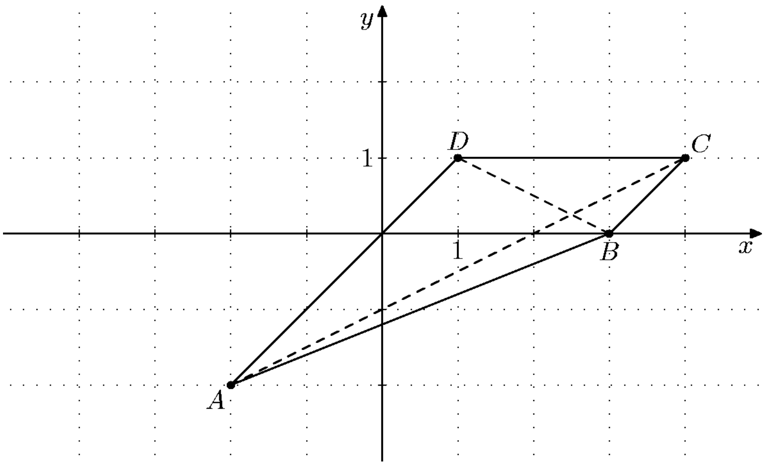
Übungen zur Selbstkontrolle I

1) a) Wie ist der Anstieg der Geraden g durch zwei Punkte $P = (x, y)$, $Q = (u, v)$ definiert? In welchem Falle ist der Anstieg *nicht* sinnvoll definiert?
b) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Gerade g durch die Punkte $A = (3, 4)$ und $B = (-5, -8)$.
c) Entscheiden Sie, welche der Punkte $C = (-2, 3)$, $D = (1, 1)$ auf der Geraden g liegen.
d) Welche besondere Lage haben die Gerade $g(A, B)$ und $g(C, D)$ zueinander?
e) In welchem Punkt schneiden sich die beiden Geraden?

2) Gegeben sind 6 Funktionen $f_1, \ldots, f_6$ mit den Funktionstermen
$f_1(x) = 4x + 7$, $f_2(x) = 3 - 3(x + 2)$, $f_3(x) = (2x+1)^2 - 4x^2$,
$f_4(x) = (x + 1)^2 - 2x$, $f_5(x) = (x^2 + 1) - (x - 1)^2$, $f_6(x) = x(x - 1)$.
a) Welche dieser Funktionen sind linear? Geben Sie ggf. Anstieg und y-Achsenabschnitt der Graphen an.
b) Zeichnen Sie in *ein* Koordinatensytem die Graphen der Funktionen, die linear sind.

3) Gegeben ist das folgende Viereck $ABCD$. Die Eckpunkte haben ganzzahlige Koordinaten.



a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass dieses Viereck ein *Trapez* ist, d. h. zwei parallele Seiten besitzt.
b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der *Diagonalen.*

Übungen zur Selbstkontrolle I — Lösungen

1) a) Der Anstieg der Geraden g durch $P = (x, y)$ und $Q = (u, v)$ ist definiert als

$$a = \frac{y - v}{x - u} \quad \text{für } x \neq u\,.$$

Im Falle $x = u$ ist der Anstieg nicht definiert, da dann der Nenner des Quotienten 0 wird.
b) Wir berechnen den Anstieg

$$a = \frac{4 - (-8)}{3 - (-5)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}\,.$$

Damit lautet die Gleichung der Geraden $y = \frac{3}{2}x + b$ und wir berechnen b durch Einsetzen des Punktes $A = (3, 4)$:

$$4 = \frac{3}{2} \cdot 3 + b \iff b = 4 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Damit lautet die Geradengleichung $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.
c) Wir setzen die Punkte C, D in die Gleichung für g ein und überprüfen, ob sie erfüllt ist oder nicht:
$C = (-2, 3)$ eingesetzt: $3 = \frac{3}{2} \cdot (-2) - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$ ist falsch. Also liegt C nicht auf g.
$D = (1, 1)$ eingesetzt: $1 = \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} = 1$ ist wahr. Also liegt D auf g.
d) Wir berechnen den Anstieg der Geraden $g(C, D)$:

$$\frac{1 - 3}{1 - (-2)} = -\frac{2}{3}\,.$$

Dieser Anstieg $-\frac{2}{3}$ ist das Negative des Kehrwertes des Anstiegs $\frac{3}{2}$ von g, die beiden Geraden verlaufen also senkrecht zueinander.
e) Da in b) bereits gezeigt wurde, dass D zu $g(A, B)$ gehört, und D selbstverständlich auf $g(C, D)$ liegt, ist D der gesuchte Schnittpunkt.
Als Übung berechnen wir den Geradenschnittpunkt nach dem üblichen Verfahren. Wir bestimmen zunächst eine Gleichung für $g(C, D)$. Der Anstieg ist $-\frac{2}{3}$. Durch Einsetzen von $D = (1, 1)$ in die Gleichung $y = -\frac{2}{3}x + b$ erhalten wir $1 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + b \iff b = \frac{5}{3}$. Die Gleichung für $g(C, D)$ lautet daher $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.
Schnittstelle von $g(A, B)$ und $g(C, D)$:

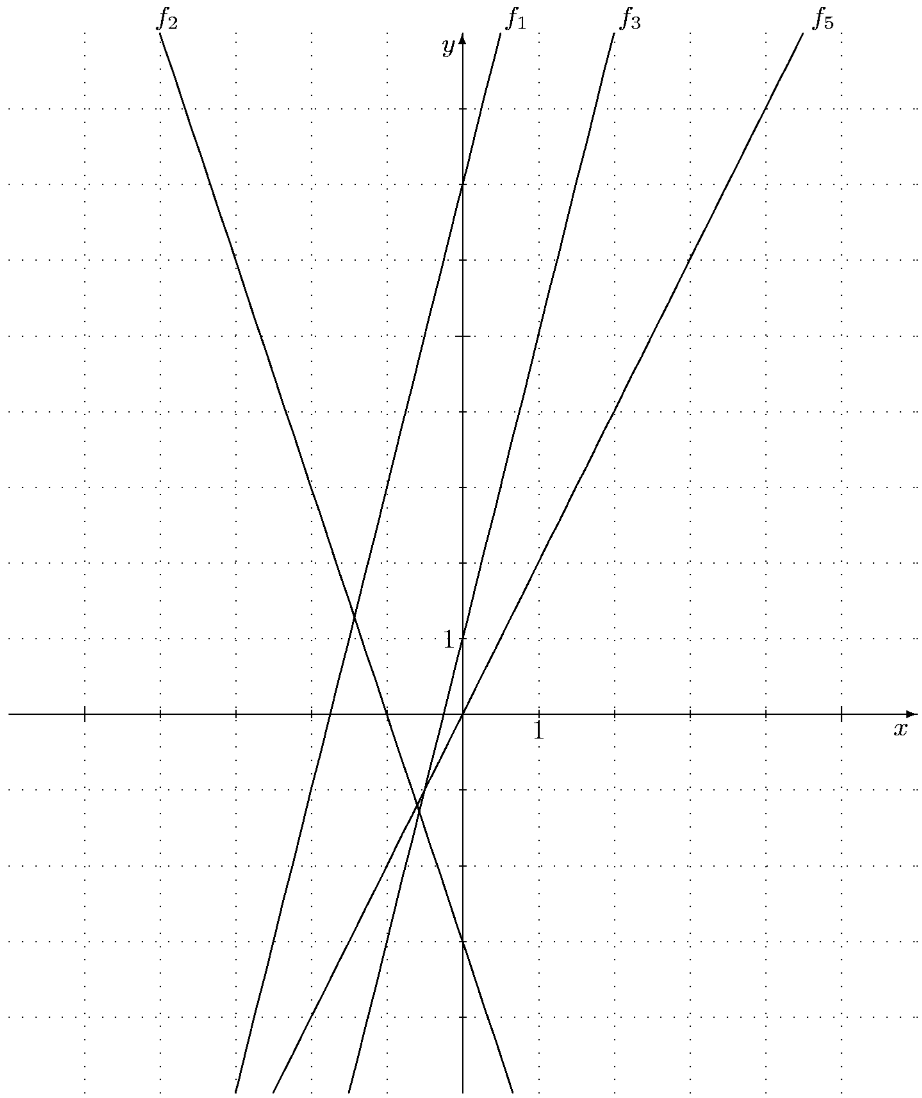
$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} &= -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \quad \Big| \cdot 2 \cdot 3 \\ \iff 9x - 3 = -4x + 10 &\iff 13x = 13 \iff x = 1\,. \end{aligned}$$

Einsetzen der Schnittstelle in eine der Geradengleichungen ergibt die y-Koordinate des Schnittpunktes:

$$y = \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} = 1\,.$$

Der Schnittpunkt ist $(1, 1) = D$.

2) a) f_1 ist linear; der Graph ist die Gerade mit dem Anstieg 4 und dem y-Achsenabschnitt 7.
$f_2(x) = -3x - 3$, also ist auch f_2 linear und der Graph die Gerade mit Anstieg -3 und y-Achsenabschnitt -3.
$f_3(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 = 4x + 1$, also ist f_3 linear und der Graph die Gerade mit dem Anstieg 4 und dem y-Achsenabschnitt 1.
$f_4(x) = x^2 + 2x + 1 - 2x = x^2 + 1$, also ist f_4 keine lineare Funktion.
$f_5(x) = x^2 + 1 - x^2 + 2x - 1 = 2x$, also ist f_5 linear, der Graph ist die Ursprungsgerade mit Anstieg 2.
$f_6(x) = x^2 - x$, also ist f_6 nicht linear.
b) Skizzen der Graphen der vier linearen unter den Funktionen:



3) a) Wir lesen zunächst die Koordinaten der Eckpunkte ab:

$$A = (-2, -2)\,, \quad B = (3, 0)\,, \quad C = (4, 1)\,, \quad D = (1, 1)\,.$$

Die Zeichnung legt nahe, das $g(A, D)$ und $g(B, C)$ parallel sein könnten. Wir berechnen die Anstiege dieser Geraden:

$$a_{AD} = \frac{1 - (-2)}{1 - (-2)} = 1\,, \quad a_{BC} = \frac{1 - 0}{4 - 3} = 1\,.$$

Die Anstiege sind gleich, die Geraden also parallel und damit das Viereck ein Trapez.
Wir bestimmen Gleichungen für die Diagonalen:

$$a_{AC} = \frac{1-(-2)}{4-(-2)} = \frac{1}{2} \implies b = y - \frac{1}{2}x = 1 - \frac{1}{2}\cdot 4 = -1 \implies y = \frac{1}{2}x - 1\,,$$
$$a_{BD} = \frac{1-0}{1-3} = -\frac{1}{2} \implies b = y + \frac{1}{2}x = 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}\,,\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\,.$$

Schnittpunktsberechnung:

$$\frac{1}{2}x - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \Big|\cdot 2$$
$$\iff x - 2 = -x + 3 \iff 2x = 5 \iff x = \frac{5}{2}\,,$$
$$y = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2} - 1 = \frac{1}{4}\,.$$

Der Schnittpunkt ist $S = (\frac{5}{2}\,,\ \frac{1}{4})$.
Alle Ergebnisse sind im Einklang mit der gebenen Skizze!